DER EINFACHE RAHMEN ALS GRUNDLAGE ZUR BERECHNUNG MEHRTEILIGER RAHMEN

Von der
Technischen Hochschule zu Breslau
zur
Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte
D i s s e r t a t i o n

Vorgelegt von
Dipl.-Ing. Adolf Melles
aus Breslau.

Referent:
Prof.Dr.-Ing.L.Mann.

Korreferent:
Prof.Dr.-Ing.K .Mayer.

Tag der mündlichen Prüfung: 21.6.1938.

Vervielfältigung:M.Fordan,Breslau.

*43583

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

V o r w o r t .

Die vorliegende Abhandlung betrifft ein neues Verfahren für die Berechnung von hochgradig unbestimmten Rahmenkonstruktionen. Das Ziel besteht darin, durch Benutzung statisch unbestimmter Hauptsysteme, die in einfachster Form aus Viereckrahmen bestehen, eine große Zahl voneinander unabhängiger Operationen vorweg übersichtlich zu erledigen, sodaß die darauf folgende wesentliche Arbeit nur die Aufstellung einer noch beschränkten Zahl von Elastizitätsgleichungen erfordert. Das Verfahren eignet sich daher besonders für die vielfachen Systeme, die aus einfachen Einzelrahmen gebildet sind. Es sei noch darauf hingewiesen, daß nach diesem Verfahren die Ausbildung praktischer Näherungsrechnungen für komplizierte Systeme, wie z.B. mehrfache Stockwerkrahmen, möglich ist.

Breslau, im Februar 1938.

A. M e l l e s.

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort.

1. Das Berechnungsverfahren.
   Methode der Stabverdoppelung, S. 1;
   Das statisch unbestimmte Hauptsystem, S.4.

2. Der Einzelrahmen.
   Der geschlossene Viereckrahmen, S. 14.
   Der geschlossene Rechteckrahmen, S.21.
   Der zweistielige Rahmen, S. 28.

3. Der Einfluß der Normalkraft, S. 30.

4. Der einfache Stockwerkrahmen.
   Geneigte, verschiedene Gurte, S. 33.
   Parallele, gleiche Gurte, S. 37.
   Verteilte Gurtbelastung, S. 39.
   Belastung des Riegels, S. 43.
   Geneigte, gleiche Gurte, S. 47.

5. Der Pfostenträger.
   Knotenbelastung, S. 49.
   Gurtbelastung, S. 53.
   Parallele, ungleiche Gurte, S. 54.
   Einflußlinien, S. 60.
   Einfluß der Normalkräfte, S. 66.

6. Der mehrstielige Rahmen, S. 67.

7. Der mehrfache Stockwerkrahmen, S. 70.
   Näherungsrechnung, S. 94

- - - - - -

1. Das Berechnungsverfahren.

a) Methode der Stabverdoppelung.

Bei einem beliebigen Rahmenwerk, dessen Stäbe an den Knoten steif oder auch zum Teil gelenkig angeschlossen sind, werden an Stelle der Zwischenstäbe je 2 dicht nebeneinander parallel verlaufende Stäbe angenommen, wobei die steifen oder gelenkigen Anschlußbedingungen aufrecht erhalten bleiben. Hatte der Stab konstante Trägheitsmomente, so sollen auch die beiden Ersatzstäbe konstante Trägheitsmomente haben und zwar derart, daß die Summe beider Trägheitsmomente gleich dem ursprünglichen ist. Bei dem variablen I sei allgemeiner bei den Ersatzstäben I_1 und I_2 ebenfalls variabel, sodaß an jeder Stelle $I_1 + I_2 = I$ oder $I_1 = c_1 \cdot I$, $I_2 = c_2 \cdot I$, $c_1 + c_2 = 1$.

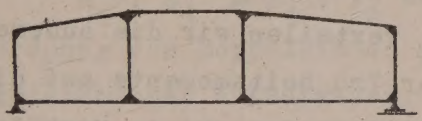


Fig. 1

Durch diese Anordnung erhöht sich der Grad der Unbestimmtheit. Würden z.B. p Stäbe verdoppelt, so erhöht sich der Grad der statischen Unbestimmtheit bei beiderseits steifem Anschluß um 3 p und bei einseitig steifem Anschluß um 2 p. Die Doppelstäbe sind vermöge der Anordnung an den Stabenden gleichen

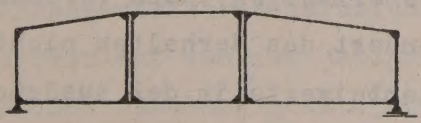


Fig. 2

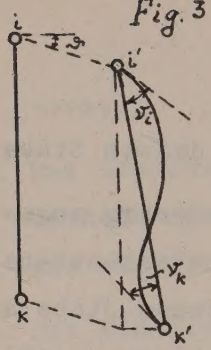


Fig. 3

Formänderungsbedingungen unterworfen; besonders ist für beide Einelstäbe, z.B. bei beiderseits steifem Anschluß gleiche Drehung der Endtangenten γ_i und γ_k und gleiche Stabdrehwinkel ϑ. Die Winkel γ_i und γ_K werden entgegen dem Sinne des Uhrzeigers positiv gezählt. Für die Momente bei Knoten i folgt dann

$$M_{i1} = - \frac{E \cdot I_1}{L} \cdot (4\gamma_i + 2\gamma_k + 6\vartheta)$$

$$M_{i2} = - \frac{E \cdot I_2}{L} \cdot (4\gamma_i + 2\gamma_k + 6\vartheta)$$

(Vergl.Mann: Theorie d. Rahmenwerke, S.15)

Die Summe beider Momente an den Doppelstäben ist somit gleich dem eines einzigen Stabes vom Trägheitsmomente $I_1 + I_2$. Das Gleiche gilt von den Momenten bei k. Wir haben den ursprünglichen Stab und hiermit auch den Doppelstab zunächst unbelastet angenommen. Bei Belastung verteilen wir die äußeren Kräfte im Verhältnis der Trägheitsmomente auf die beiden Teilstäbe. Dann wird an dem obigen Verhältnis nichts geändert. Im ganzen können wir hiermit aussagen: Der Doppelstab mit den Trägheitsmomenten I_1 und I_2 verhält sich in seiner Einwirkung auf die Kräfteverteilung im übrigen Rahmenwerk wie ein einzelner Stab mit dem Trägheitsmoment $I = I_1 + I_2$. Der Fall, daß in k. gelenkiger Anschluß besteht, läßt sich in analoger Weise erledigen. Auch veränderliches Trägheitsmoment ändert das Verhalten nicht, da lediglich die Zahlenbeiwerte in den Ausdrücken für

M_{i1} und M_{i2} sich in gleicher Weise ändern. (Vergl. angegebene Quelle S.40).

Im folgenden betrachten wir den Stab mit beiderseits steifem Anschluß mit konstantem Trägheitsmoment, da die Uebertragbarkeit auf die anderen Fälle ohne weiteres ersichtlich ist. Denken wir schließlich noch im Doppelstab Querschnitte $F_1 = c_1 \cdot F$, $F_2 = c_2 \cdot F$, $c_1 + c_2 = 1$, wobei F den Querschnitt des ursprünglichen Stabes bedeutet, so erkennt man weiter, daß infolge der bedingten gleichen Längenänderung die Teilstäbe Kräfte N_1 und N_2 erhalten, deren Summe gleich der Kraft N ist, die der ursprüngliche Stab erhält.

Das Resultat der bisherigen Betrachtungen können wir, wie ohne weiteres einleuchtend ist, auch dahin ansprechen:

Die Gleichungen $M_{i1} : M_{i2} = I_1 : I_2$

$M_{K1} : M_{K2} = I_1 : I_2$

$N_1 : N_2 = F_1 : F_2$

sind bei Anordnung von Doppelstäben als hinzutretende Elastizitätsgleichungen aufzufassen. Auf diese Weise würde aber kein Vorteil erreicht, sondern nur die geschaffene Komplikation in einfacher Weise wieder behoben werden. Das Neue des jetzt zu entwickelnden Verfahrens besteht darin, daß gerade das System von erhöhter statischer Unbestimmtheit beibehalten werden soll, um trotzdem in anderer Weise unter Benutzung bequemer statisch unbestimmter Hauptsysteme ein günstiges Berechnungsverfahren durchführen zu können. Da das Schlußresultat von der Wahl der statisch unbestimmten Größen unabhängig ist, muß sich dabei auch das oben gezeigte Verhalten der Doppelstäbe bei der

Kräfteübertragung wieder herausstellen. Das heißt, wir addieren die Momente und Normalkräfte in den Doppelstäben, um die Kräfte in den ursprünglichen Stäben zu erhalten.

b) Das statisch unbestimmte Hauptsystem.

Zwischen den Doppelstäben werden in den Gurtungen Gelenke angeordnet und die Momente an diesen Stellen als statisch unbestimmte Größen eingeführt. Die Elastizitätsgleichungen zur Bestimmung der Momente Y drücken die Bedingung aus, daß die Drehwinkel der zusammenstoßenden Rahmenecken übereinstimmen.

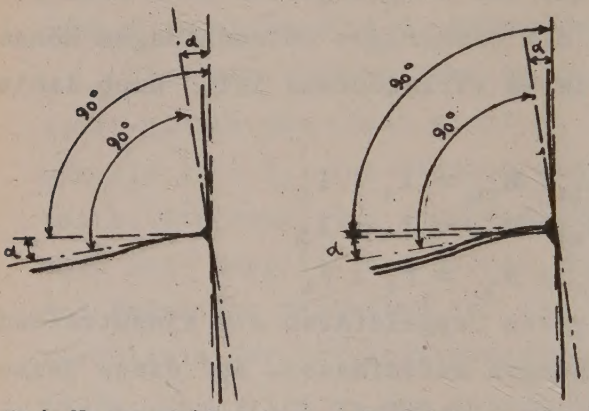


Fig. 4

Bei Vernachlässigung der Längenänderung der Stäbe infolge der Normalkräfte wird $\vartheta = 0$. Bezuglich der in den Gelenken auftretenden Vertikalkräfte ist zu sagen, daß bei Vernachlässigung der Längenänderung infolge der Normalkräfte in den Pfosten

$Q_o = Q_u = 1/2 \cdot Q$ angenommen werden kann.

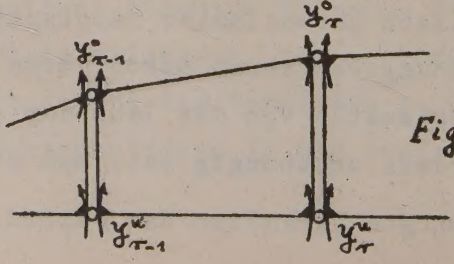


Fig. 5

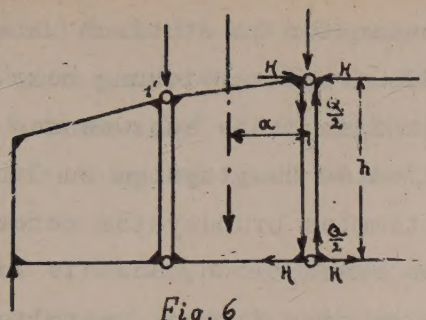


Fig. 6

Die Horizontalkräfte in den Gelenken bestimmen sich aus der Bedingung

$$H = \pm \frac{Q.a}{h}$$

Bei verschiedenen Querschnitten von Ober- und Untergurt und bei verschieden geneigten Gurten werden Y_o und Y_u verschieden. Sind dagegen die Querschnitte der Gurte und damit die Einspannungsgrade der Pfosten gleich und nur Knotenlasten vorhanden, dann ist $Y_o = Y_u = Y$. Belastung der Gurtstäbe zwischen den Knotenpunkten wird durch 2 Belastungen ersetzt, die ebenfalls gleiche Knotenmomente Y_o und Y_u erzeugen. Eine Einzellast P im Obergurt z.B. wird ersetzt durch eine Last 1/2 P im Ober- und Untergurt, einmal gleich und sodann entgegengesetzt gerichtet. Weiteres ist bei Untersuchung der Stockwerkrahmen und Pfostenträger angegeben.

Das nach Anordnung der Gelenke gegebene System wird als statisch unbestimmtes Hauptsystem der Berechnung zu Grunde gelegt. Es besteht aus einer Reihe gelenkig verbundener Einzelrahmen, deren statisch bestimmte Grundsysteme Träger auf 2 Stützen sind. Letztere werden gebildet durch die Doppelstäbe der Pfosten.

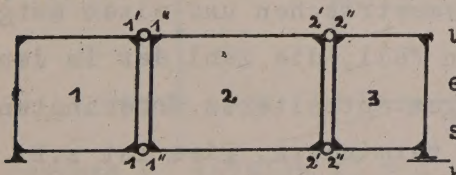


Fig. 7

Die Unbekannten Y im statisch unbestimmten Hauptsystem erzeugen bei diesem Grundsystem nur in den Doppelstäben Momente; Normalkräfte treten dabei nicht auf. Da

bei Ermittlung der Unbekannten im statisch unbestimmten Hauptsystem die Arbeitsgleichung bezw. das Integral nur über diejenigen Stäbe auszudehnen ist, die für ein dem unbestimmten Hauptsystem zu Grunde liegendes, statischbestimmtes Grundsystem notwendig sind, ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Berechnung der Unbekannten sich sehr einfach gestaltet. Von Bedeutung für das Berechnungsverfahren ist natürlich, daß die Bestimmung der Momente und Kräfte im Einzelrahmen nicht zu umständlich ist, und dadurch obiger Vorteil wieder ganz oder z.T. aufgehoben wird.

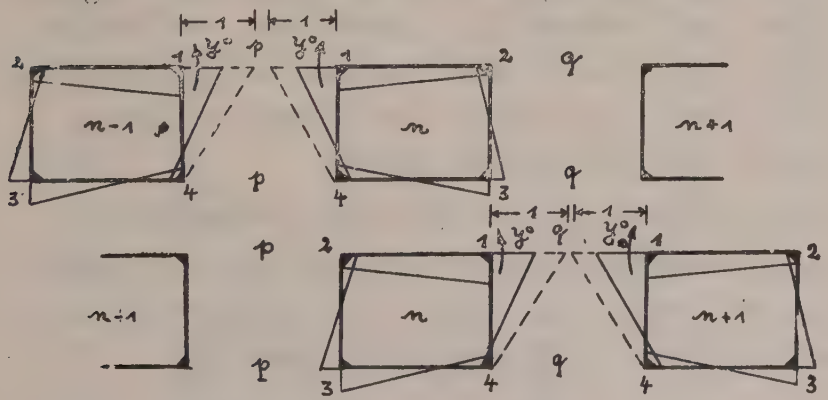
In den nachfolgenden Untersuchungen werden allgemein die durch die Doppelstäbe verbundenen Stäbe als Gurte und die Doppelstäbe als Pfosten bezeichnet, ob es sich um den Pfostenträger oder um den Stockwerkrahmen handelt, damit Verwechslungen vermieden werden. Die unbekannten Knotenmomente werden bezeichnet mit Y_p, Y_q, Y_r, die Pfosten mit den Buchstaben a bis z und die Einzelrahmen mit den Ziffern 1 bis n. Sind die Knotenmomente im Ober- und Untergurt gleich, dann werden sie bei gleichem Drehsinn mit Y' bezeichnet.*) Diese Unterscheidung ist vorteilhaft, wenn bei gleichen Querschnitten paralleler Gurte die Möglichkeit besteht, durch Teilung der Belastung in einen Symmetrischen und einen entgegengesetzt symmetrischen Fall, die Zahl der in den Elastizitätsgleichungen enthaltenen Unbekannten und dieser selbst zu vermindern. Dies ist z.B. der

*) bei verschiedenem Drehsinn mit Y"

Fall beim Pfostenträger, wenn eine Einzellast des Gurtes zwischen den Knotenpunkten ersetzt wird durch 2 Lasten 1/2 P auf beiden Gurten, einmal in gleicher Richtung und dann in entgegengesetzter Richtung wirkend.

Da die Pfosten-Querschnitte beim Träger vom Auflager nach der Mitte zu zunehmen und beim Stockwerkrahmen von oben nach unten, wird es fast immer möglich sein, den Pfosten als Doppelstab so zu teilen, daß die Einzelrahmen links und rechts bezw. oben und unten Stäbe gleichen Querschnitts erhalten, und so die Berechnung der Einzelrahmen wenigstens bei parallelen Gurten wesentlich vereinfacht wird. Es sei noch bemerkt, daß beim Pfostenträger mit gerader Feldzahl 2 Einzelrahmen mit verschiedenen Pfosten bleiben.

Im statisch unbestimmten Hauptsystem mit n Feldern oder Einzelrahmen sind $2\cdot(n-1)$ Unbekannte Y vorhanden, für die sich $2\cdot(n-1)$ Elastizitätsgleichungen aufstellen lassen. Bezeichnet man



Momente M' infolge $Y_p^\circ = 1$ u. $Y_q^\circ = 1$

$\frac{1}{E}\cdot\frac{1}{3}\cdot\delta_{11}\cdot 3\cdot E = \delta_{11}$ mit a_{11} und entsprechend

δ_{22} , δ_{12} , δ_{33} , δ_{34} .. mit a_{11} , a_{12} , a_{33} , a_{34} .....

δ_{13} , δ_{14} , δ_{23} , ... mit b_{13} , b_{14} , b_{23} ....

dann lauten die Elastizitätsgleichungen mit Y = + 1

$$a_{11}\cdot Y_1 + a_{12}\cdot Y_2 + b_{13}\cdot Y_3 + b_{14}\cdot Y_4 = -c_1 - \delta_{1t}$$

$$a_{21}\cdot Y_1 + a_{22}\cdot Y_2 + b_{23}\cdot Y_3 + b_{24}\cdot Y_4 = -c_2 - \delta_{2t}$$

$$b_{31}\cdot Y_1 + b_{32}\cdot Y_2 + a_{33}\cdot Y_3 + a_{34}\cdot Y_4 + b_{35}\cdot Y_5 + b_{36}\cdot Y_6 = -c_3 - \delta_{3t}$$

$$b_{41}\cdot Y_1 + b_{42}\cdot Y_2 + a_{43}\cdot Y_3 + a_{44}\cdot Y_4 + b_{45}\cdot Y_5 + b_{46}\cdot Y_6 = -c_4 - \delta_{4t}$$

Die obigen Werte a, b und c werden allgemein für die Doppelstäbe p und q bestimmt, wie folgt:

$$a_{p^o p^o} = \left[\bar{s}^{n-1}_{14(p)}\cdot(2M'_{1(p^o)} - M'_{4(p^o)})\right] + \left[\bar{s}^{n}_{14(p)}\cdot(2M'_{1(p^o)} - M'_{4(p^o)})\right]$$

$$a_{p^o p^u} = \left[\bar{s}^{n-1}_{14(p)}\cdot(2M'_{4(p^o)} - M'_{1(p^o)})\right] + \left[\bar{s}^{n}_{14(p)}\cdot(2M'_{4(p^o)} - M'_{1(p^o)})\right]$$

bezw. $\left[\bar{s}^{n-1}_{14(p)}\cdot(2M'_{1(p^u)} - M'_{4(p^u)})\right] + \left[\bar{s}^{n}_{14(p)}\cdot(2M'_{1(p^u)} - M'_{4(p^u)})\right]$

M' sind die Momente infolge Belastung mit Y = + 1

Für q ist entsprechend der Index q statt p,

n statt n-1 und n+1 statt n zu setzen.

$$b_{p^o q^o} = \left[\bar{s}^{n}_{23(p)}\cdot(2M'_{2(q^o)} - M'_{3(q^o)})\right] = \left[\bar{s}^{n}_{23(q)}\cdot(2M'_{2(p^o)} - M'_{3(p^o)})\right]$$

$$b_{p^o q^u} = \left[\bar{s}^{n}_{23(p)}\cdot(2M'_{2(q^u)} - M'_{3(q^u)})\right] = \left[\bar{s}^{n}_{23(q)}\cdot(2M'_{3(p^o)} - M'_{2(p^o)})\right]$$

In diesen Gleichungen sind für p und q die entsprechenden Ziffern der Reihenfolge einzusetzen. Der Einfluß der Wärme wird zunächst nicht berücksichtigt. Wird in den Formeln für a das Moment der äußeren Belastung M_o statt M' gesetzt, erhält man c.

Eine Verminderung der Zahl der Unbekannten und der Elastizitätsgleichungen läßt sich nun auf folgende Weise erreichen: Bei einem Pfostenträger mit verschiedenen Gurten z.B. werden zunächst die

Gelenke der Doppelstäbe der Reihe nach von a bis r beseitigt. Zunächst sind die Unbekannten Y_α° und $Y_\alpha^{\prime\prime}$ für äußere Belastung und je für Belastung durch $Y_b^\circ = 1$ und $Y_b^{\prime\prime} = 1$ im System Fig. 9_α und damit die Momente in den Rahmen 1 und 2 zu bestimmen. Weiter werden dann für das in Fig. 9_β dargestellte System die Unbekannten Y_β° und $Y_\beta^{\prime\prime}$ für äußere Belastung und je für die Belastung durch $Y_c^\circ = 1$ und $Y_c^{\prime\prime} = 1$ errechnet und so fort. Schließlich bleibt noch die Feststellung der Knotenmomente Y_r° und $Y_r^{\prime\prime}$ des letzten Doppelstabes für äußere Belastung übrig.

Da in dem System Fig. 9_β z.B. für die Berechnung von Y_β° und $Y_\beta^{\prime\prime}$ vom linken zweifachen Rahmen 1–2 nur der anteilige Stab des Doppelstabes b als statisch bestimmtes System benötigt wird, sind zunächst nur für diesen Stab im System 9_α die Momente infolge der äußeren Belastung und der Belastung durch $Y_b^\circ = 1$ und $Y_b^{\prime\prime} = 1$ zu ermitteln.

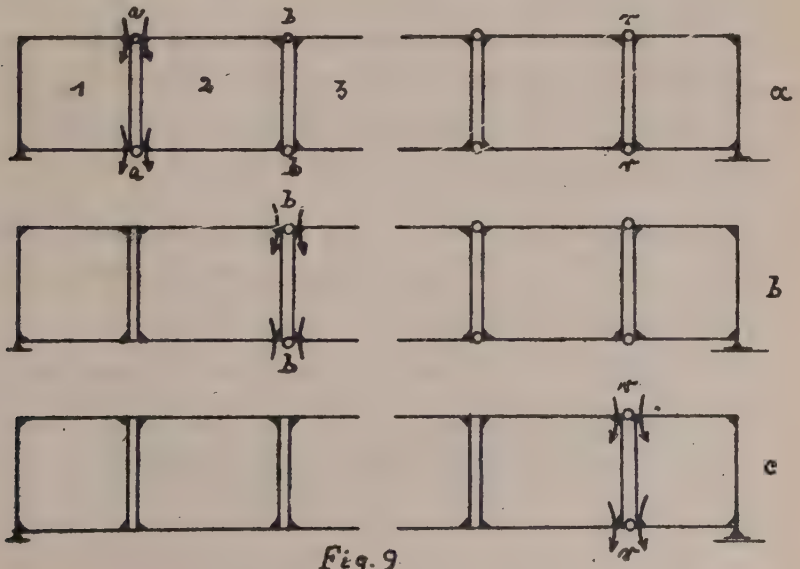


Fig. 9

Nach Bestimmung von Y°_{r} und $Y^{\prime\prime}_{r}$ wird rückwärts das endgültige Knotenmoment Y°_{r-1} und $Y^{\prime\prime}_{r-1}$ errechnet und so weiter bis zur Ableitung von Y°_{a} und $Y^{\prime\prime}_{a}$ von Y°_{b} und $Y^{\prime\prime}_{b}$. Bei n Feldern sind somit n–2 Gruppen von je 3 Gleichungs-Paaren zu lösen. Jede Gleichung der Gleichungs-Paare enthält 2 Unbekannte Y° und $Y^{\prime\prime}$. Außerdem ist für den letzten Doppelstab noch 1 Gleichungs-Paar zu bestimmen für äußere Belastung.

Die endgültigen Momente in den Einzelrahmen und damit im Pfostenträger ergeben sich aus den Momenten M° der äußeren Belastung im Einzelrahmen und den 4 bezw. 2 Knotenmomenten. Es ist das Knotenmoment

$$Y^{\circ}_{p} = (Y^{\circ}_{I} + Y^{\circ}_{II})$$

worin Y°_{I} durch das Gleichungs-Paar für äußere Belastung der Gruppe p und $Y^{\circ}_{II} = \alpha . Y_{q} = \alpha_{1} . Y^{\circ}_{q} + \alpha_{2} . Y^{\prime\prime}_{q}$ bestimmt ist.

Entsprechend ist $Y^{\prime\prime}_{p} = (Y^{\prime\prime}_{I} + Y^{\prime\prime}_{II})$ mit $Y^{\prime\prime}_{II} = \beta . Y_{q} = \beta_{1} . Y^{\circ}_{q} + \beta . Y^{\prime\prime}_{q}$.

Wesentlich einfacher gestaltet sich der ganze Rechnungsvorgang, wenn im Ober- und Untergurt die Momente gleich oder entgegengesetzt gleich sind. In diesem Falle wird $Y^{\circ} = Y^{\prime\prime}$ bezw. $Y^{\circ} = - Y^{\prime\prime}$. Zur Unterscheidung werden die Knotenmomente gleicher Drehung $Y^{\circ} = - Y^{\prime\prime}$ mit Y' und die mit verschiedenem Drehsinn $Y^{\circ} = Y^{\prime\prime}$ mit Y'' bezeichnet.

Werden die Momente im Einzelrahmen bei Belastung durch Y' mit M' und im Pfosten p insbesondere mit M'_{p} bezeichnet, dann ergeben sich die Werte

a', b' und c' wie folgt:

$$a'_p = (\overset{n-1}{s}'_{14(p)} \cdot M'_p) + (\overset{n}{s}'_{14(p)} \cdot M'_p)$$

$$a'_q = (\overset{n}{s}'_{14(q)} \cdot M'_q) + (\overset{n+1}{s}'_{14(q)} \cdot M'_q)$$

$$b'_n = (\overset{n}{s}'_{23(p)} \cdot M'_q) \text{ bezw. } (\overset{n}{s}'_{23(q)} \cdot M'_p) \quad \text{u.s.w.}$$

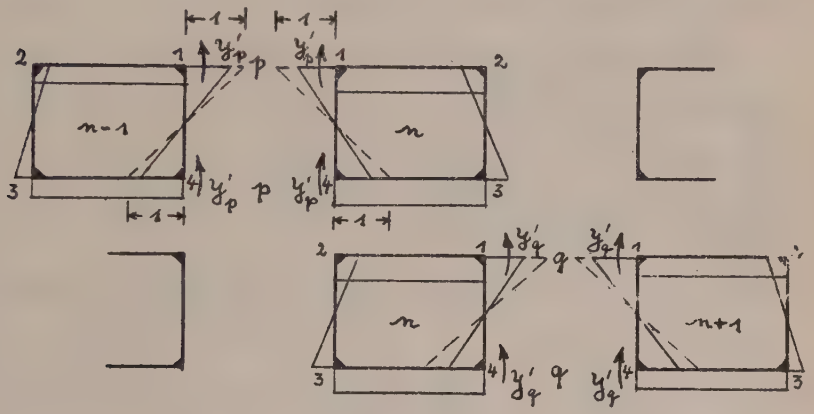


Fig. 10

$$c'_p = (\overset{n-1}{s}'_{14(p)} \cdot M^{\circ}_p) + (\overset{n}{s}'_{14(p)} \cdot M^{\circ}_p); \quad c'_q = (\overset{n}{s}'_{14(q)} \cdot M^{\circ}_q) + (\overset{n+1}{s}'_{14(q)} \cdot M^{\circ}_q)$$

Die Elastizitätsgleichungen lauten

$$a'_p \cdot Y'_p + b'_n \cdot Y'_q = -c'_p$$

$$b'_n \cdot Y'_p + a'_q \cdot Y'_q + b'_{n+1} \cdot Y'_r = -c'_q$$

$$b'_{n+1} \cdot Y'_q + a'_r \cdot Y'_r + b'_{n+2} \cdot Y'_{r+1} = -c'_r \text{ u.s.w.}$$

Bei Belastung durch Knotenmomente mit verschiedenem Drehsinn Y" und entsprechender äußerer Belastung werden mit M" und M''_P

(vergleiche Fig. Seite 12)

$$a''_p = \left(\overline{s}'^{\,n-1}_{14(p)} \cdot M''_p\right) + \left(\overline{s}'^{\,n}_{14(p)} \cdot M''_p\right)$$

$$a''_q = \left(\overline{s}'^{\,n}_{14(q)} \cdot M''_q\right) + \left(\overline{s}'^{\,n+1}_{14(q)} \cdot M''_q\right)$$

$$c''_p = \left(\overline{s}'^{\,n-1}_{14(p)} \cdot M^{\circ}_p\right) + \left(\overline{s}'^{\,n}_{14(p)} \cdot M^{\circ}_p\right)$$

$$b''_n = \left(\overline{s}'^{\,n}_{23(p)} \cdot M''_q\right) \text{ bezw. } = \left(\overline{s}'^{\,n}_{23(q)} \cdot M''_p\right)$$

$$c''_q = \left(\overline{s}'^{\,n}_{14(q)} \cdot M_q\right) + \left(\overline{s}'^{\,n+1}_{14(q)} \cdot M^{\circ}_q\right)$$

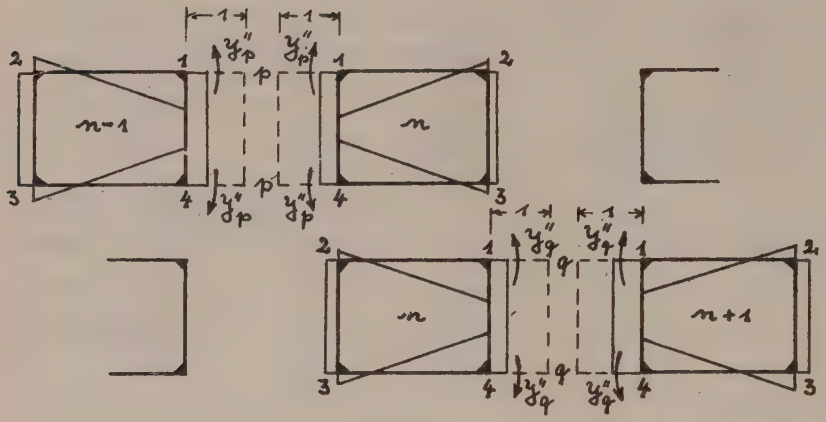


Fig. 11

Die Elastizitätsgleichungen lauten

$$a''_p \cdot Y''_p + b'_n \cdot Y''_q = -c''_p$$

$$b''_n \cdot Y''_p + a''_q \cdot Y''_q + b''_{n+1} \cdot Y''_r = -c''_q$$

$$b''_{n+1} \cdot Y''_q + a''_r \cdot Y''_r + b''_{n+2} \cdot Y''_{r+1} = -c''_r \quad \text{u.s.w.}$$

Das beschriebene Verfahren setzt voraus, daß die Berechnung des Einzelrahmens sich möglichst einfach gestaltet, da sonst die erzielten Vorteile durch erhöhte Rechenarbeit bei diesem aufgehoben werden. Die eingehender behandelten Systeme sind daher solche mit rechteckigen Rahmen.

Der folgende Abschnitt befaßt sich mit der Berechnung des Einzelrahmens. Da dieser als Grundlage des neuen Berechnungsverfahrens anzusehen ist, wurde zunächst der geschlossene Rahmen in

Form eines beliebigen Vierecks eingehend untersucht, um brauchbare Formeln für die schnelle Ermittlung der Momente zu erhalten. Die hierfür aufgestellten Formeln dienen dann weiter zur Ableitung derjenigen für die Sonderfälle des geschlossenen Rahmens mit parallelen Pfosten und geneigten Gurten und des Rechteck-Rahmens.

Selbst bei umständlicher Berechnung des Einzelrahmens von unsymmetrischer Form ist zu berücksichtigen, daß die Bestimmung der unbekannten Knotenmomente im statisch unbestimmten Hauptsystem sich dafür um so leichter gestaltet, da das statisch bestimmte Grund-System einfacher Art ist. Die weiteren Untersuchungen sind also sehr übersichtlich, abgesehen davon, daß durch die Unterteilung des ganzen Rechnungsganges in mehrere Abschnitte Zwischenkontrollen möglich sind.

Die ausführlichere Behandlung des Einzelrahmens ist auch deshalb erforderlich, da Formeln über Rahmen mit ungleichen Querschnitten der beiden Gurte oder Pfosten in der Literatur kaum vorhanden sind. Besonders aber sind Formeln für die im Berechnungsverfahren wichtigsten Belastungsfälle der Knoten- bezw. Eckmomente und der gleich- bezw. entgegengesetzt gerichteten Belastungshälften bisher nicht gebräuchlich.

1. Der Einzelrahmen.

a) Der geschlossene Viereckrahmen.

Der geschlossene Viereckrahmen 1-2-3-4 mit verschiedenen Trägheitsmomenten in den einzelnen Stäben wird durch Gelenke in den Knoten 2 und 4 in einen geschlossenen Zweigelenkrahmen verwandelt und dieser als Hauptsystem des Viereckrahmens betrachtet. Als Unbekannte sind zu ermitteln die beiden Eckmomente Y_2 und Y_4 . Es werden nachfolgende Bezeichnungen eingeführt:

s_{12} für Stab 1-2
s_{14} " " 1-4
s_{32} " " 3-2
s_{34} " " 3-4

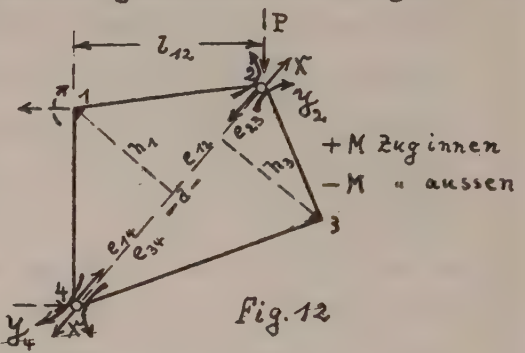


Fig. 12

I_c für ein mittleres Trägheitsmoment

s'_{12} für $s_{12} \cdot \frac{I_c}{I_{12}}$

s'_{14} " $s_{14} \cdot \frac{I_c}{I_{14}}$

u.s.w.

Zunächst sind die Eckmomente im Zweigelenkrahmen infolge Einwirkung der Knotenmomente $Y_2 = 1$ und $Y_4 = 1$ sowie der äußeren Belastung zu ermitteln. In dem statisch bestimmten Grundsystem des Zweigelenkrahmens wird die Diagonalkraft X als Unbekannte betrachtet.

$X = \frac{-\int M \cdot M'_x \cdot ds'}{\int M'^2_x \cdot ds'}$, worin M'_x das Moment infolge $X = 1$ bedeutet.

$X = 1$ erzeugt die Momente $M'_{1(x)} = -h_1$ und $M'_{2(x)} = +h_3$.

$$\int M_x^{(2)} \cdot ds = \frac{1}{3} \cdot h_1^2 \cdot (s_{12}' + s_{14}') + \frac{1}{3} \cdot h_3^2 \cdot (s_{32}' + s_{34}') = \underline{\frac{1}{3} \cdot w}$$

Ein Moment $Y_2 = 1$ im Knoten 2 ergibt im Grundsystem die Momente $M'_{(2)}$. Für die Knoten 1 und 3 ist demnach

$$M'_{1(2)} = +1 \cdot \frac{e_{14}}{d} \quad ; \quad M'_{3(2)} = +1 \cdot \frac{e_{34}}{d}$$

Ein Moment $Y_4 = 1$ gibt entsprechend

$$M'_{1(4)} = +1 \cdot \frac{e_{12}}{d} \text{ und } M'_{3(4)} = +1 \cdot \frac{e_{32}}{d}$$

Infolge $Y_2 = +1$ ist

$$X_{(2)} = -\frac{\frac{-1}{6} \cdot h_1 \cdot \left[2 \cdot \frac{e_{14}}{d} (s'_{12} + s'_{14}) + s'_{12}\right] + \frac{1}{6} \cdot h_3 \cdot \left[2 \cdot \frac{e_{34}}{d} (s'_{32} + s'_{34}) + s'_{32}\right]}{1/3 \cdot w}$$

$$= +\frac{h_1 \cdot v_{1(2)} - h_3 \cdot v_{3(2)}}{2 \cdot w}$$

$$M_{1(2)} = +\frac{e_{14}}{d} - X_{(2)} \cdot h_1 \text{ und } M_{3(2)} = +\frac{e_{34}}{d} + X_{(2)} \cdot h_3$$

Infolge $Y_4 = +1$ ist

$$X_{(4)} = -\frac{\frac{1}{6} \cdot h_1 \cdot \left[2 \cdot \frac{e_{12}}{d} (s'_{12} + s'_{14}) + s'_{14}\right] + \frac{1}{6} \cdot h_3 \cdot \left[2 \cdot \frac{e_{32}}{d} (s'_{32} + s'_{34}) + s'_{34}\right]}{1/3 \cdot w}$$

$$= +\frac{h_1 \cdot v_{1(4)} - h_3 \cdot v_{3(4)}}{2 \cdot w}$$

$$M_{1(4)} = +\frac{e_{12}}{d} - X_{(4)} \cdot h_1 \text{ und } M_{3(4)} = \frac{e_{32}}{d} + X_{(4)} \cdot h_3$$

Damit sind die Momente im Zweigelenkrahmen infolge Belastung durch ein Moment im Gelenk 2 bezw. 4 bekannt. In gleicher Weise sind die Momente infolge Belastung durch sonstige äußere Kräfte und Momente zu bestimmen. Zur Ermittlung der im geschlossenen Viereckrahmen als statisch unbestimmte Größen betrachteten Momente Y_2 und Y_4 sind 2 Elastizitätsgleichungen vorhanden.

$$a_2 \cdot Y_2 + b \cdot Y_4 = -c_2$$

$$b \cdot Y_2 + a_4 \cdot Y_4 = -c_4$$

Diese ergeben:

$$Y_2 = \frac{-c_2 \cdot a_4 + c_4 \cdot b}{a_2 \cdot a_4 - b^2} \text{ und } Y_4 = \frac{-c_4 \cdot a_2 + c_2 \cdot b}{a_2 \cdot a_4 - b^2}$$

In obigen Gleichungen ist mit Berücksichtigung des Reduktionssatzes

$$a_2 = 6 \cdot \int M_{(2)}^2 \cdot d\acute{s} = 6 \cdot \int M'_{(2)} \cdot M_{(2)} \cdot d\acute{s}$$

$$a_4 = 6 \cdot \int M_{(4)}^2 \cdot d\acute{s} = 6 \cdot \int M'_{(4)} \cdot M_{(4)} \cdot d\acute{s}$$

$$b = 6 \cdot \int M_{(2)} \cdot M_{(4)} \cdot d\acute{s} = 6 \cdot \int M'_{(2)} \cdot M_{(4)} \cdot d\acute{s}$$

$$= 6 \cdot \int M_{(2)} \cdot M'_{(4)} \cdot d\acute{s}$$

$$c_2 = 6 \cdot \int M_{(o)} \cdot M'_{(2)} d\acute{s} = 6 \cdot \int M'_{(o)} \cdot M_2 \cdot d\acute{s}$$

$$c_4 = 6 \cdot \int M_{(o)} \cdot M'_{(4)} \cdot d\acute{s} = 6 \cdot \int M'_{(o)} \cdot M_4 \cdot d\acute{s}$$

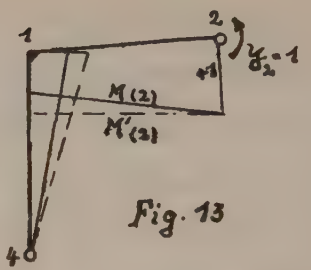


Fig. 13

$M_{(2)}$ bezw. $M_{(4)}$ sind die Momente im geschlossenen Zweigelenkrahmen infolge $Y_2 = 1$ bezw. $Y_4 = 1$ und $M_{(o)}$ das Moment infolge sonstiger äußerer Belastung. Die Werte $M'_{(2)}$, $M'_{(4)}$ und $M'_{(o)}$ sind die entsprechende Momente in dem statisch bestimmten Grundsystem des Zweigelenkrahmens. Der Anteil des Integrals $\int M_{(2)}^2 \cdot d\acute{s}$ z.B. ist für den oberen Teil des Zweigelenkrahmens (Fig. 13)

$$\frac{1}{6} \cdot M_{1(2)} \cdot \left[2 \cdot \frac{e_{14}}{d} \cdot (s'_{12} + \acute{s}_{14}) + \acute{s}_{12} \right] + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{e_{14}}{d} + 2 \right) \cdot \acute{s}_{12}$$

$$= \frac{1}{6} M_{1(2)} \cdot v_{1(2)} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{e_{14}}{d} + 2 \right) \cdot \acute{s}_{12}$$

und für den unteren Teil entsprechend

$$\frac{1}{6} M_{3(2)} \cdot v_{3(2)} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{e_{34}}{d} + 2 \right) \cdot s'_{32}$$

$$\frac{1}{6} a_2 = \int M_{(2)}^2 \cdot d\acute{s} = \frac{1}{6} \left[M_{1(2)} \cdot v_{1(2)} + M_{3(2)} v_{3(2)} + \acute{s}_{12} \cdot \left(\frac{e_{14}}{d} + 2 \right) + \acute{s}_{32} \cdot \left(\frac{e_{34}}{d} + 2 \right) \right]$$

Die Werte a_2, a_4 und b lassen sich ohne weiteres anschreiben.

Zusammenstellung.

$$w = h_1^2 \cdot (\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14}) + h_3^2 \cdot (\acute{s}_{32} + \acute{s}_{34})$$

$Y_2 = 1$)

$$v_{1(2)} = + \frac{2 \cdot e_{14}}{d} \cdot (\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14}) + \acute{s}_{12}$$

$$v_{3(2)} = + \frac{2 \cdot e_{34}}{d} \cdot (\acute{s}_{32} + \acute{s}_{34}) + \acute{s}_{32}$$

$$M_{1(2)} = + \frac{e_{14}}{d} - \frac{h_1^2 \cdot v_{1(2)} - h_1 \cdot h_3 \cdot v_{3(2)}}{2w}$$

$$M_{3(2)} = + \frac{e_{34}}{d} + \frac{h_1 \cdot h_3 \cdot v_{1(2)} - h_3^2 \cdot v_{3(2)}}{2w}$$

$Y_4 = 1$

$$v_{1(4)} = +\frac{2 \cdot e_{12}}{d} \cdot (\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14}) + \acute{s}_{14}$$

$$v_{3(4)} = +\frac{2 \cdot e_{32}}{d} \cdot (\acute{s}_{32} + \acute{s}_{34}) + \acute{s}_{34}$$

$$M_{1(4)} = +\frac{e_{12}}{d} - \frac{h_1^2 \cdot v_{1(4)} - h_1 \cdot h_3 \cdot v_{3(4)}}{2w}$$

$$M_{3(4)} = +\frac{e_{32}}{d} + \frac{h_1 \cdot h_3 \cdot v_{1(4)} - h_3^2 \cdot v_{3(4)}}{2w}$$

$$a_2 = \left[M_{1(2)} \cdot v_{1(2)} + M_{3(2)} \cdot v_{3(2)} + \acute{s}_{12} \cdot \left(\frac{e_{12}}{d} + 2\right) + \acute{s}_{32} \cdot \left(\frac{e_{32}}{d} + 2\right)\right]$$

$$a_4 = \left[M_{1(4)} \cdot v_{1(4)} + M_{3(4)} \cdot v_{3(4)} + \acute{s}_{14} \cdot \left(\frac{e_{12}}{d} + 2\right) + \acute{s}_{34} \cdot \left(\frac{e_{32}}{d} + 2\right)\right]$$

$$b = \left(M_{1(2)} \cdot v_{1(4)} + M_{3(2)} \cdot v_{3(4)} + \acute{s}_{12} \cdot \frac{e_{12}}{d} + \acute{s}_{32} \cdot \frac{e_{32}}{d}\right) \text{ bezw.}$$

$$\left(M_{1(4)} \cdot v_{1(2)} + M_{3(4)} \cdot v_{3(2)} + \acute{s}_{14} \cdot \frac{e_{14}}{d} + \acute{s}_{34} \cdot \frac{e_{34}}{d}\right)$$

$$m = a_2 \cdot a_4 - b^2$$

Belastung durch Einzellast P im Knoten 2.

Der Hebelarm der Kraft P in bezug auf Knoten 1 ist l_{12}

$$M'_{1(0)} = -P \cdot l_{12}$$

$$M_{1(0)} = P \cdot l_{12} \cdot \left(-1 + \frac{h_1^2 (\acute{s}_{12} \cdot \acute{s}_{14})}{w}\right); \quad M_{3(0)} = -P \cdot l_{12} \frac{h_1 \cdot h_3 (\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14})}{w}$$

$$c_2 = -P \cdot l_{12} \cdot \left(2M_{1(2)}(\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14}) + \acute{s}_{12}\right); \quad c_4 = -P \cdot l_{12} \left(2M_{1(4)}(\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14}) + \acute{s}_{14}\right)$$

Belastung durch Moment am Knoten 1. (Stab 1–4)

$$M'_{1(0)} = -1$$

$$M_{1(0)} = +h_1^2 \cdot \frac{\acute{s}_{14}}{w} \text{ bezw. } -1 + h_1^2 \cdot \frac{\acute{s}_{14}}{w}; \quad M_{3(0)} = -h_1 \cdot h_3 \cdot \frac{\acute{s}_{14}}{w}$$

$$c_2 = -\acute{s}_{14} \cdot 2 \cdot M_{1(2)} \qquad c_4 = -\acute{s}_{14} \cdot (2 \cdot M_{1(4)} + 1)$$

Belastung durch Moment am Knoten 4. (Stab 1–4)

$$M'_{4(0)} = -1$$

$$M_{1(0)} = +h_1^2 \cdot \frac{\acute{s}_{14}}{2w} \qquad M_{3(0)} = -h_1 \cdot h_3 \cdot \frac{\acute{s}_{14}}{2w}$$

$$c_2 = -\acute{s}_{14} \cdot M_{1(2)} \qquad c_4 = -\acute{s}_{14} \cdot (M_{1(4)} + 2)$$

– . – . – . –

$$Y_2 = \frac{-c_2 \cdot a_4 + c_4 \cdot b}{m}, \quad Y_4 = \frac{-c_4 \cdot a_2 + c_2 \cdot b}{m}$$

Sonderfall.

Der geschlossene Viereckrahmen hat parallele Vertikalstäbe (Pfosten) bei verschiedenem Trägheitsmoment sämtlicher Stäbe. Statt der Diagonalkraft wird die Horizontalkraft in den Gelenken des geschlossenen Zweigelenkrahmens als Unbekannte X eingeführt.

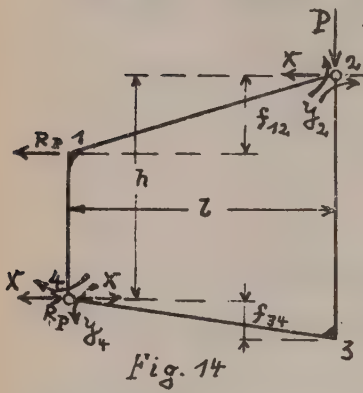


Fig. 14

$$w = s_{14}^2 \cdot (\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14}) + \acute{s}_{32}^2 \cdot (\acute{s}_{32} + \acute{s}_{34})$$

$$v_{1(2)} = \acute{s}_{12}\,;\; v_{3(2)} = 2 \cdot \acute{s}_{34} + 3 \cdot \acute{s}_{32}$$

$\gamma_2 = 1$)
$$M_{1(2)} = -\frac{s_{14}^2 \cdot v_{1(2)} - s_{14} \cdot s_{23} \cdot v_{3(2)}}{2w}$$

$$M_{3(2)} = +1 + \frac{s_{14} \cdot s_{23} \cdot v_{1(2)} - s_{23}^2 \cdot v_{3(2)}}{2w}$$

$$v_{1(4)} = 2 \cdot \acute{s}_{12} + 3 \cdot \acute{s}_{14}\,; v_{34} = \acute{s}_{34}$$

$\gamma_4 = 1$)
$$M_{1(4)} = +1 - \frac{s_{14}^2 \cdot v_{1(4)} - s_{14} \cdot s_{23} \cdot v_{3(4)}}{2w}$$

$$M_{3(4)} = +\frac{s_{14} \cdot s_{23} \cdot v_{1(4)} - s_{23}^2 \cdot v_{3(4)}}{2w}$$

$$a_2 = (M_{1(2)} \cdot v_{1(2)} + M_{3(2)} \cdot v_{3(2)} + 2 \cdot \acute{s}_{12} + 3 \cdot \acute{s}_{32})$$

$$a_4 = (M_{1(4)} \cdot v_{1(4)} + M_{3(4)} \cdot v_{3(4)} + 2 \cdot \acute{s}_{34} + 3 \cdot \acute{s}_{14})$$

$$b = (M_{1(2)} \cdot v_{1(4)} + M_{3(2)} \cdot v_{3(4)} + \acute{s}_{12}) \text{ bezw. } = (M_{1(4)} \cdot v_{1(2)} + M_{3(4)} \cdot v_{3(2)} + \acute{s}_{34})$$

1. Belastung durch P im Knoten 2.

$$M_{1(0)} = P \cdot l \cdot \left(-1 + \frac{s_{14}^2 \cdot (\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14})}{w}\right);\; M_{3(0)} = -P \cdot l \cdot \frac{s_{14} \cdot s_{23} \cdot (\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14})}{w}$$

$$c_2 = -P \cdot l \cdot \left(2M_{1(2)} \cdot (\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14}) + \acute{s}_{12}\right);\; c_4 = -P \cdot l \cdot \left(2M_{1(4)} \cdot (\acute{s}_{12} + \acute{s}_{14}) + \acute{s}_{14}\right)$$

2. Belastung durch Moment am Knoten 1. (Stab 1–4)

$$M_{1(0)} = +s_{14}^2 \cdot \frac{\acute{s}_{14}}{w} \text{ bezw. } -1 + s_{14}^2 \cdot \frac{\acute{s}}{w}\;;\; M_{3(0)} = -s_{14} \cdot s_{23} \cdot \frac{\acute{s}_{14}}{w}$$

$$c_2 = -\acute{s}_{14} \cdot 2 \cdot M_{1(2)} \qquad c_4 = -\acute{s}_{14} \cdot (2 \cdot M_{1(4)} + 1)$$

3. Belastung durch Moment am Knoten 4. (Stab 1–4)

$$M_{1(0)} = +s_{14}^2 \cdot \frac{\acute{s}_{14}}{2w} \qquad M = -s_{14} \cdot s_{23} \cdot \frac{\acute{s}_{14}}{2w}$$

$$c = -\acute{s}_{14} \cdot M_{1(2)} \qquad c = -\acute{s}_{14} \cdot (M_{1(4)} + 2)$$

4. Belastung durch Last P auf Stab 1-2.

$$\frac{x}{l} = \frac{x_s}{s} = n$$

$$M_{1(0)} = P.x.\left(-1 + \frac{s_{14}^2 \cdot (\acute{s}_{14} + \acute{s}_{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3-n))}{w}\right);$$

$$M_{3(0)} = -P \cdot x \cdot \frac{s_{14} \cdot s_{32} \cdot (\acute{s}_{14} + \acute{s}_{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3-n))}{w}$$

$$c_2 = -P.x.\left(M_{1(2)} \cdot (2.\acute{s}_{14} + \acute{s}_{12}.n \cdot (3-n)) + n^2.\acute{s}_{12}\right)$$

$$c_4 = -P.x.\left(M_{1(4)} \cdot (2.\acute{s}_{14} + \acute{s}_{12}.n \cdot (3-n)) + \acute{s}_{14}\right)$$

5. Gleichmäßige Belastung p des Stabes 1-2.

Gesamtlast $Q = p \cdot l$

$$M_{1(0)} = +Q \cdot l \left(-1 + \frac{s_{14}^2 \cdot (\acute{s}_{14} + \frac{3}{4} \cdot \acute{s}_{12})}{2w}\right)$$

$$M_{3(0)} = -Q \cdot l \cdot \frac{s_{14} \cdot s_{23} \cdot (\acute{s}_{14} + \frac{3}{4} \cdot \acute{s}_{12})}{2 \cdot w}$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \cdot Q \cdot l \cdot (2.M_{1(2)}(\acute{s}_{14} + \frac{3}{4} \cdot \acute{s}_{12}) + \frac{1}{2} \cdot \acute{s}_{12})$$

$$c_4 = -\frac{1}{2} \cdot Q \cdot l \cdot (2.M_{1(4)}(\acute{s}_{14} + \frac{3}{4} \cdot \acute{s}_{12}) + \acute{s}_{14})$$

Bei Belastung der Riegel und Knoten, wie sie für Stockwerkrahmen mit geneigten Gurten in Betracht kommt, können die Belastungsfälle auf obige zurückgeführt werden. Ist der obere Riegel s_{14} belastet, so kann die Momentenfläche zerlegt werden in eine solche für einen einfachen Balken s_{14} und eine weitere Belastung der Knoten durch die Auflagerkräfte des Balkens. Diese können mit anderen Knotenlasten zusammengesetzt werden.

Die Knotenlasten können in Richtung der Stäbe $s_{34(12)}$ und s_{14} zerlegt werden, sodaß lediglich die Komponenten S_{14} den Rahmen auf Biegung beanspruchen.

6. Gleichmäßige Belastung p des Riegels s_{32}

$$M_{3(o)} = + p.s_{32}^4 \cdot \frac{\acute{s}_{32}}{8 \cdot w} \quad ; \quad M_{1(o)} = - p.s_{32}^3 . s_{14} \cdot \frac{\acute{s}_{32}}{8 \cdot w}$$

$$c_4 = - \frac{1}{4} .p.s_{32}^2 . M_{3(4)} . \acute{s}_{32} ; c_2 = - \frac{1}{4} .p.s_{32}^2 . (M_{3(2)} + 1) . \acute{s}_{32}$$

7. Zwei gleichgerichtete Knotenlasten P_4 und P_1 .

$$S_{14} = H = \frac{1}{l} . (P_4 . f_{34} - P_1 . f_{12})$$

$$M_{3(o)} = H.l.(-1 + \frac{s_{32}^2 . (\acute{s}_{32} + \acute{s}_{34})}{w})$$

$$c_2 = \mp H.l.(2.M_{3(2)} . (\acute{s}_{32} + \acute{s}_{34}) + \acute{s}_{32})$$

$H \rightarrow (c -) \qquad H \leftarrow (c +)$

$$M_{1(o)} = H.l.s_{14} . s_{23} . \frac{(\acute{s}_{32} + \acute{s}_{34})}{w}$$

$$c_4 = \overline{+} H.l.(2M_{3(4)} . (\acute{s}_{32} + \acute{s}_{34}) + \acute{s}_{34})$$

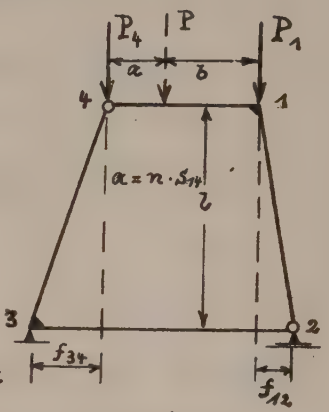


Fig. 15

8. Zwei entgegengesetzte Lasten P_4 und P_1 ergeben

$$H = \pm \frac{1}{2} . (P_4 . f_{34} + P_1 . f_{12})$$

9. Eizellast auf Riegel s_{32} .

$$M_{3(o)} = P.n.(1-n)(2-n).s_{32}^2 . \frac{\acute{s}_{32}}{2 \cdot w} ;$$

$$M_{1(o)} = -P.n.(1-n)(2-n).s_{14} . s_{32} . \frac{\acute{s}_{32}}{2 \cdot w}$$

$$c_4 = + P.n.(1-n)(2-n).s_{32} . \acute{s}_{32} . M_{3(4)}$$

$$c_2 = + P.n.\left(M_{3(2)}(1-n)(2-n) + (1-n^2)\right) . s_{32} . \acute{s}_{32}$$

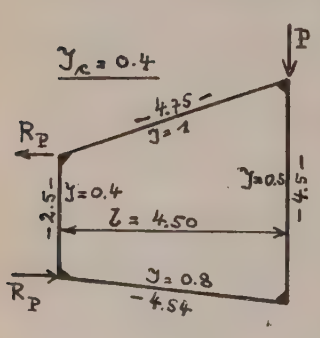


Fig. 16

Beispiel.

s_{12}	= 4,75	$\acute{s}_{12}$	= 1,9
s_{14}	= 2,50	$\acute{s}_{14}$	= 2,5
s_{34}	= 4,54	$\acute{s}_{34}$	= 2,27
s_{32}	= 4,50	$\acute{s}_{32}$	= 3,6

$w = 2,5^2 . 4,4 + 4,5^2 . 5,87 = 146$

$v_{1(2)} = 1,9 \qquad v_{3(4)} = 2,27$

$v_{3(2)} = 2.5,87 + 3,6 = 15,34$

$v_{1(4)} = 2.4,4 + 2,5 = 11,30$

$M_{1(2)} = -\frac{1}{292}.(2,5^2.1,9 - 2,5.4,5.15,34) = +0,549\ mt$

$M_{3(2)} = 1 + \frac{1}{292}.(2,5.4,5.1,9 - 4,5^2.15,34) = +0,012\ "$

$M_{1(4)} = 1 - \frac{1}{292}.(2,5^2.11,3 - 2,5.4,5.2,27) = +0,845\ "$

$M_{3(4)} = +\frac{1}{292}.(2,5.4,5.11,3 - 4,5^2.2,27) = +0,278\ "$

$a_2 = (0,549.1,9 + 0,012.15,34 + 2.1,9 + 3.3,6) = 15,02$

$a_4 = (0,845.11,3 + 0,278.2,27 + 2.2,27 + 3.2,5) = 22,22$

$b = (0,549.11,3 + 0,012.2,27 + 1,9) = 8,14$

bezw. $(0,845 . 1,9 + 0,278.15,34 + 2,27)$

$M_{1(o)} = P.l.(-1 + \frac{2,5^2.4,4}{146}) = 0,811 . P . l\ mt$

$M_{3(o)} = -P.l.\frac{2,5.4,4.4,5}{146} = -0,338 . P . l\ mt$

$c_2 = -P.l.(2.4,4.0,549 + 1,9) = -6,73 . P.l$

$c_4 = -P.l.(2.4,4.0,845 + 2,5) = -9,94 . P.l$

$M_2 = Y_2 = \frac{1}{268}.(+6,73.22,22 - 9,94.8,14).P.l = +0,258.P.l$

$M_4 = Y_4 = \frac{1}{268}.(+9,94.15,02 - 6,73.8,14).P.l = +0,352.P.l$

$M_1 = (-0,811 + 0,141 + 0,296).P.l = -0,374.P.l\ mt$

$M_3 = (-0,338 + 0,003 + 0,097).P.l = -0,238.P.l\ mt$

---

b) Der geschlossene Rechteckrahmen.

Als Unbekannte des geschlossenen Zweigelenkrahmens werden zweckmäßig die Momente in 2 benachbarten Knoten angenommen, da sich einfachere Formeln ergeben und besonders die Ableitung für Rahmen mit gleichen Träg= heitsmomenten der Gurt- bezw. Pfostenstäbe erleich= tert wird. In Anlehnung an die bisherige Formelent= wicklung wird

$$\frac{1}{3}\cdot l^2 \cdot (\acute{s}_{12}+3\cdot\acute{s}_{32}+\acute{s}_{34}) = \frac{1}{3}\cdot l^2 \cdot w$$

Infolge $Y_1 = +1$ ist

$$X_{(1)} = -\frac{-\frac{1}{2}\cdot l\cdot(\acute{s}_{12}+\acute{s}_{23})}{1/3\cdot l^2\cdot w} = \frac{3\cdot(\acute{s}_{12}+\acute{s}_{23})}{2\cdot w\cdot l}$$

$$M_{3(1)} = \frac{-3\cdot(\acute{s}_{12}+\acute{s}_{32})}{2\cdot w}\ ; \qquad M_{2(1)} = +1 - M_{3(1)}$$

Infolge $Y_4 = +1$ ist

$$X_{(4)} = -\frac{-\frac{1}{2}\cdot l\cdot(\acute{s}_{34}+\acute{s}_{32})}{1/3\cdot l^2\cdot w} = \frac{3(\acute{s}_{34}+\acute{s}_{32})}{2\cdot w\cdot l}$$

$$M_{2(4)} = -\frac{3(\acute{s}_{34}+\acute{s}_{32})}{2\cdot w}\ ; \qquad M_{3(4)} = +1 - M_{2(4)}$$

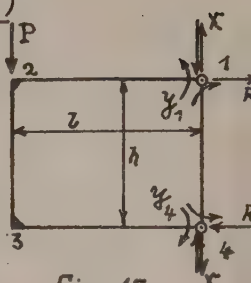


Fig. 17

In gleicher Weise sind die in den nachfolgenden Formeln für verschiedene Belastungsfälle des geschlossenen Rechteckrahmens angegebenen Momente $M_{(o)}$, die im Zweigelenkrahmen auftreten, zu ermitteln.

Die Elastizitätsgleichungen zur Bestimmung der im geschlossenen Rechteckrahmen auftretenden statisch unbestimmten Eckmomente Y_1 und Y_4 lauten:

$$a_1\cdot Y_1 + b\cdot Y_4 = -c_1$$

$$b\cdot Y_1 + a_4 Y_4 = -c_4$$

$$Y_1 = \frac{-c_1\cdot a_4 + c_4\cdot b}{m} \text{ und } Y_4 = \frac{-c_4\cdot a_1 + c_1\cdot b}{m}\ ;$$

$$m = a_1\cdot a_4 - b^2$$

In der gleichen Bedeutung wie bei dem geschlossenen Viereckrahmen (S. 16) ergibt sich

$$\int M_{(1)}^2\, d\acute{s} = \frac{1}{6}\cdot a_1 = \frac{1}{6}\cdot\left[2\cdot(3\cdot\acute{s}_{12}+\acute{s}_{14}+\acute{s}_{32}) - 3\cdot(\acute{s}_{12}+\acute{s}_{32})\cdot M_{3(1)}\right]$$

$$\int M_{(4)}^2\, d\acute{s} = \frac{1}{6}\cdot a_4 = \frac{1}{6}\cdot\left[2\cdot(3\cdot\acute{s}_{34}+\acute{s}_{14}+\acute{s}_{32}) - 3\cdot(\acute{s}_{34}+\acute{s}_{32})\cdot M_{2(4)}\right]$$

$$\int M_{(1)}\cdot M_{(4)}\, d\acute{s} = \frac{1}{6}\cdot b = \frac{1}{6}\cdot\left[\acute{s}_{14}+\acute{s}_{23} - 3\cdot(\acute{s}_{12}+\acute{s}_{23})\cdot M_{2(4)}\right]$$

$$\text{bezw. } = \frac{1}{6}\cdot\left[\acute{s}_{14}+\acute{s}_{23} - 3\cdot(\acute{s}_{34}+\acute{s}_{32})\cdot M_{3(1)}\right]$$

Die weiteren Integrale

$\int M_{(o)} \cdot M_{(1)} \cdot d\acute{s} = \frac{1}{6} \cdot c_1$ und $\int M_{(o)} \cdot M_{(4)} d\acute{s} = \frac{1}{6} \cdot c_4$

werden bei den verschiedenen Belastungsfällen angegeben.

1) Belastung durch P im Knoten 2.

$M'_{2(o)} = + P \cdot l$ $\qquad M'_{3(o)} = 0$

$M_{2(o)} = + P \cdot l - M_{3(o)}$ $\qquad M_{3(o)} = - P \cdot l \cdot \frac{2 \cdot \acute{s}_{21} + 3\acute{s}_{23}}{2 \cdot w}$

$c_1 = P \cdot l \cdot [+ 3 \cdot \acute{s}_{21} + 2 \cdot \acute{s}_{23} - M_{3(1)}(2 \cdot \acute{s}_{21} + 3 \cdot \acute{s}_{23})]$

$c_4 = P \cdot l [+ \acute{s}_{23} - M_{2(4)}(2 \cdot \acute{s}_{21} + 3 \cdot \acute{s}_{23})]$

2) Belastung durch Moment am Knoten 1.(Stab 1–4)

$M'_{1(o)} = - 1$; $M_{2(o)} = M_{3(o)} = 0$; $c_1 = - 2 \cdot \acute{s}_{14}$; $c_4 = - \acute{s}_{14}$

3) Belastung durch Moment amKnoten 4. (Stab 1–4)

$M'_{4(o)} = - 1$; $M_{2(o)} = M_{3(o)} = 0$; $c_1 = - \acute{s}_{14}$; $c_4 = - 2 \cdot \acute{s}_{14}$

Ist das Trägheitsmoment der Gurte gleich, so wird

$a_1 = a_4 = a$; $m = (a + b) \cdot (a - b)$

$\acute{s}_{12} = \acute{s}_{34} = l'$; $\acute{s}_{14} = h'_{14}$ und $\acute{s}_{23} = h'_{23}$

$a + b = \frac{3}{2 \cdot l'^2 + 3 \cdot h_{23}} \cdot (l'^2 + 2 \cdot l' \cdot (h'_{14} + h'_{23}) + 3 \cdot h'_{14} \cdot h'_{23}) =$

$\frac{3}{2 \cdot l'^2 + 3 \cdot h'_{23}} \cdot i \parallel$

$a - b = 6 \cdot l'^2 + h'_{14} + h'_{23} = k \parallel$

Bei unsymmetrischer Belastung kann die Rechnung vereinfacht werden, wenn 2 unsymmetrisch wirkende Belastungsfälle, die zusammengesetzt d.unsymmetrischen Belastungsfall ergeben, eingeführt werden. Dann wird $c_1 = c_4$ bezw. $c_1 = -c_4$ und es ergeben sich Formeln

$Y = \pm \frac{c \cdot (a+b)}{(a+b) \cdot (a-b)} = \pm \frac{a}{a-b}$ und $Y = \pm \frac{c}{a + b}$

Die Formeln für die wichtigsten Belastungsfälle sind nachfolgend aufgeführt.

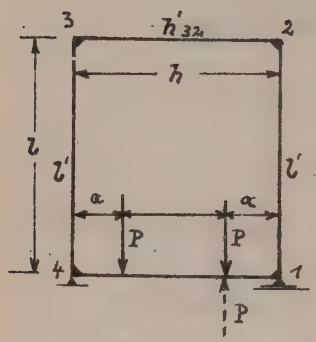


Fig. 18

$k = \acute{h}_{14} + \acute{h}_{23} + 6 \cdot l'$

$i = l'^2 + 2 \cdot l' \cdot (\acute{h}_{14} + \acute{h}_{23}) + 3 \cdot \acute{h}_{14} \cdot \acute{h}_{23}$

Ist $\acute{h}_{14} = \acute{h}_{23}$, dann ist

$k = 2 \cdot (\acute{h} + 3 \cdot l); \quad i = (\acute{h} + l') \cdot (3 \cdot \acute{h} + l')$

1) Belastung der Knoten 1 und 4 mit gleichgerichteten Momenten $M = 1$.

$M_{1(0)} = -1; \quad M_{4(0)} = +1$

$M_2 = -M_3 = \frac{\acute{h}_{14}}{k}$ (Gurt und Pf.)

$M_1 = -M_4 = \frac{\acute{h}_{14}}{k}$ (Gurt); $M_1 = -1 + \frac{\acute{h}_{14}}{k}$ (Pf.)

2) Belastung der Knoten 1 und 4 mit entgegengesetzt gerichteten Momenten.

$M_{1(0)} = M_{4(0)} = -1; \quad M_1 = M_4 = +\frac{1}{l} \cdot \acute{h}_{14} \cdot (2l' + 3 \cdot \acute{h}_{23})$ (G)

$M_1 = M_4 = -\frac{l' \cdot (l' + 2 \cdot \acute{h}_{23})}{i} = -1 + \frac{1}{l} \cdot \acute{h}_{14} \cdot (2l' + 3 \cdot \acute{h}_{23})$

3) Last $H = 1$ im Knoten 2. $\quad M_2 = M_3 = \frac{-l' \cdot \acute{h}_{14}}{i}$.

$M_3 = -M_2 = \frac{3l' + \acute{h}_{14}}{2 \cdot k} H \cdot l$ (G. u. Pf.)

$M_1 = -M_4 = \frac{3 \cdot l' + \acute{h}_{23}}{2 \cdot k} H \cdot l$ (" " ")

4) Belastung des Pfostens (Riegels) 1–4 durch gleichmäßige Last p.

$M_2 = M_3 = -\frac{p \cdot h^2}{12} \cdot \frac{l' \cdot \acute{h}_{14}}{i}$ (G. u. Pf.)

$M_1 = M_4 = +\frac{p \cdot h^2}{12} \cdot \frac{3 \cdot \acute{h}_{14} \cdot \acute{h}_{23} + 2 \cdot l' \cdot \acute{h}_{14}}{i}$ (G. u. Pf.)

5) Einzellast auf Riegel 1–4.

Die Momente werden zweckmäßig aus den Belastungsfällen 6 und 7 ermittelt.

6) Zwei gleichgerichtete, symmetrisch wirkende Lasten P auf Riegel 1 – 4.

$P \cdot a = P \cdot n \cdot h; \quad a = n \cdot h$

$$M_2 = M_3 = -\frac{1}{i}\cdot l'\cdot \acute{k}_{14}\cdot n(1-n)\cdot h\cdot P; \qquad M_4 = M_1 =$$

$$+\frac{1}{i}\cdot(3\cdot \acute{k}_{23}\,\acute{k}_{14} + 2\cdot l'\cdot \acute{k}_{14})\cdot n\cdot(1-n)\cdot h\cdot P$$

7) Zwei entgegengesetzt gerichtete, symmetrisch wirkende Lasten P auf 1 – 4.

$$M_2 = -M_3 = M_1 = -M_4 = \frac{\acute{k}_{14}}{k}\cdot n\cdot(1-n)\cdot(1-2n)\cdot P\cdot h$$

8) Belastung eines Gurtes durch gleichmäßige Last p. Ermittlung der Momente aus den Belastungsfällen 9 und 10.

9) Belastung beider Gurte mit gleichgerichteter, verteilter Last p.

$$M_2 = -M_3 = \frac{1}{k}\cdot(2\cdot l' + \acute{k}_{14})\cdot\frac{p\cdot l^2}{2}$$

$$M_1 = -M_4 = -\frac{4\cdot l' + \acute{k}_{23}}{k}\cdot\frac{p\cdot l^2}{2}$$

10) Belastung beider Gurte mit entgegengesetzt gerichteter, verteilter Last p

$$M_2 = M_3 = -\frac{(3\cdot \acute{k}_{14} + l')\cdot l'}{i}\cdot\frac{p\cdot l^2}{12}.$$ Für M_1 u. M_4 $\acute{k}_{23}$ statt $\acute{k}_{14}$

11) Belastung beider Riegel mit gleichgerichtetem p.

$$M_2 = M_3 = -\frac{p}{12}h^2\cdot\frac{\acute{k}_{14}(3\cdot \acute{k}_{14} + l')}{i};$$

$$M_1 = M_4 = +\frac{p\cdot h^2}{12}\cdot\frac{\acute{k}_{23}(3\cdot \acute{k}_{23} + l')}{i}$$

12) Belastung beider Riegel mit entgegengesetzt richtetem p.

$$M_2 = M_3 = -\frac{1\cdot p\cdot h^2}{12}\cdot\frac{3\cdot \acute{k}_{14}\,\acute{k}_{23} + 2\cdot l'\cdot \acute{k}_{23} - l'\cdot \acute{k}_{14}}{i}$$

$$M_1 = -M_4 = -\frac{1}{12}\cdot p\cdot h^2\cdot\frac{3\cdot \acute{k}_{14}\cdot \acute{k}_{23} + 2l'\cdot h'_{14} - l'\cdot \acute{k}_{23}}{i}$$

Für den mehrfachen Stockwerkrahmen und bei Vertauschung der Bezeichnungen l und h auch für den Pfostenträger mit verschiedenen Gurten kommt neben=

stehende Stützung des Einzelrahmens in Betracht. Für den geschlossenen Zweigelenkrahmen ergeben die verschiedenen Belastungen zunächst folgende Momente und Werte c.

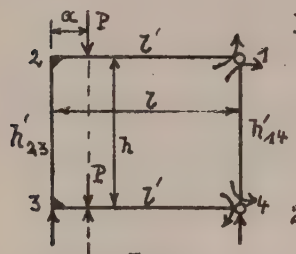


Fig. 19

1) Zwei gleichgerichtete Knotenmomen

Y = 1 in den Knoten 1 und 4

$M_2 = -M_3 = +1$

$a_1 = 6\left[2 \cdot l' + \frac{1}{3} \cdot (h'_{14} + h'_{23})\right] = \underline{\underline{2 \cdot k}}$

2) Zwei entgegengesetzt gerichtete Momente Y = 1 in den Knoten 1 und

$$M_2 = M_3 = 1 - \frac{3 \cdot l^2 (l' + h'_{23})}{l^2 \cdot w} \cdot = -\frac{l'}{w} \; ; \; w = 2 \cdot l' + 3 \cdot h'_{23}$$

$$a_2 = 6 \cdot \left[l' \cdot \left(1 - \frac{l'}{w}\right) - h'_{23} \cdot \frac{l'}{w} + h'_{14}\right] = \underline{\underline{\frac{6 \cdot i}{w}}}$$

3) Horizontalkraft im Knoten 2.

$$M_{2(0)} = -M_{3(0)} = +\frac{P \cdot h}{2} \; ; \; +Y_1 = -Y_4$$

$$c = +P \cdot h \cdot (3 \cdot l' + h'_{23})$$

4) Gleichgerichtete Last p im Ober- und Untergurt.

$$M_{2(0)} = -M_{3(0)} = 0; \; +Y_1 = -Y_4$$

$$c = +6 \cdot \frac{1}{8} p \cdot l^2 \frac{2}{3} \cdot l' 2 = p \cdot l^2 \cdot l'$$

5) Entgegengesetzt gerichtete Last p im Ober- und Untergurt.

$$M_{2(0)} = M_{3(0)} = -\frac{1}{4} p \cdot l^2 \cdot \frac{l'}{w} \; ; \; +Y_1 = +Y_4$$

$$c = +\frac{p \cdot l^2}{2} \cdot \frac{l' \cdot (l' + 3 \cdot h'_{23})}{w}$$

6) Gleichgerichtete Einzellasten P im Ober- und Untergurt.

$$M_{2(0)} = -M_{3(0)} = 0; \; +Y_1 = -Y_4$$

$$c = +6 \cdot P \cdot l \cdot l' \cdot n \cdot (1-n)$$

7) Entgegengesetzt gerichtete Einzellasten P im Ober- und Untergurt.

$$M_{2(o)} = M_{3(o)} = - P \cdot l \cdot n \cdot (1-n) \cdot (2-n) \cdot \frac{l'}{w}$$

$$c = + 6 \cdot P \cdot l \cdot l' \cdot n \cdot (1-n) \cdot \frac{l' \cdot n + h'_{23}(1-n)}{w}$$

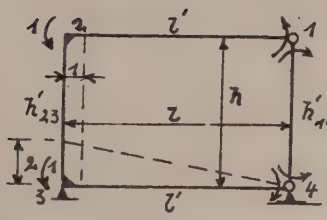


Fig. 20

8) Gleich gerichtete Momente M = 1 an den Knoten 2 und 3

$M_{2(o)} = - 1$ (G.) $M_{2(o)} = 0$ (Pf.) $Y_1 = - Y_4$

$M_{3(o)} = + 1$ (G.) $M_{3(o)} = 0$ (Pf.)

$c = -6 \cdot l'$

9) Entgegengesetzt gerichtete Momente M = 1 an den Knoten 2 u. 3

$$M_{2(o)} = M_{3(o)} = \frac{- 3 \cdot h'_{23}}{w}, \quad Y_1 = Y_4$$

$$c = + \frac{6 \cdot h'_{23} l'}{w}$$

Mit den Werten a_1 bezw. a_2 der Belastungsfälle 1 und 2 und den entsprechenden Werten c für äußere Belastung im Zweigelenkrahmen ergeben sich nun für den geschlossenen Rahmen bei obiger Stützung die endgültigen Momente.

Belastung 3.) Horizontalkraft P im Knoten 2.

$$Y = M_1 = - M_4 = - \frac{c}{a_1} = - P \cdot h \cdot \frac{3 \cdot l' + h'_{23}}{2 \cdot k}$$

$$M_2 = - M_3 = + P \cdot h \cdot \frac{3 \cdot l' + h'_{14}}{2 \cdot k}$$

Für $h'_{14} = h'_{23}$ ist $M = \pm \frac{P \cdot h}{4}$

Belastung 4) Gleichgerichtete Last p der Gurte.

$$Y = M_1 = - M_4 = - p \cdot l^2 \frac{l'}{2k} = M_2 = - M_3$$

Falls $h'_{14} = h'_{23}$, ist $M = \pm p \cdot l^2 \cdot \frac{l'}{3 \cdot l' + h}$

Belastung 5) Entgegengesetzt gerichtete Last p der Gurte.

$$Y = M_1 = M_4 = -\frac{p \cdot l^2}{12} \cdot \frac{l' : (l' + 3 \cdot \acute{h}_{23})}{i} \quad ;$$

$$M_2 = M_3 = -\frac{p \cdot l^2}{12} \cdot \frac{l' : (l' + 3 \cdot \acute{h}_{14})}{i}$$

für $\acute{h}_{14} = \acute{h}_{23}$ ist $M = -\frac{p \cdot l}{12} \cdot \frac{l'}{l' + \acute{h}}$

Belastung 6) Gleichgerichtete Einzellasten P der Gurte.

$$Y = M_1 = -M_4 = -P \cdot l \cdot 3n \cdot (1-n) \cdot \frac{l'}{k} = M_2 = -M_3$$

Belastung 7) Entgegengesetzt gerichtete Einzellasten P der Gurte

$$Y = M_1 = M_4 = -P \cdot l \cdot l' \cdot n \cdot (1-n) \cdot \frac{l' + \acute{h}_{23}(1+n)}{i}$$

$$M_2 = M_3 = -P \cdot l \cdot l' \cdot n \cdot (1-n) \frac{l' (1-n) + (2-n)\acute{h}_{14}}{i}$$

Belastung 8) Gleichgerichtete Momente an den Knoten 2 und 3

$$Y = M_1 = M_4 = \frac{3 \cdot l'}{k} \quad (G. \text{ u. } Pf.)$$

$$M_2 = -M_3 = -1 + \frac{3 \cdot l'}{k} = -\frac{3 \cdot l' + \acute{h}_{14} + \acute{h}_{23}}{k} \quad (G.)$$

$$M = -M = +\frac{3 \cdot l'}{k} \quad (Pf.)$$

Belastung 9) Entgegengesetzt gerichtete Momente an den Knoten 2 und 3

$$Y = M_1 = M_4 = +\frac{\acute{h}_{23} l'}{i} \quad (G. \text{u. } Pf.)$$

$$M_2 = M_3 = -\frac{h'_{23} \cdot (2 \cdot l' + 3 \cdot \acute{h}_{14})}{i} \quad (G.)$$

$$M_2 = M_3 = 1 - \frac{2 \cdot l' \cdot \acute{h}_{23} + 3 \cdot \acute{h}_{14} h'_{23}}{i} = +\frac{l' (l' + 2 \cdot \acute{h}_{14})}{i} \quad (Pf.)$$

c) Der zweistielige Rahmen.

Die unteren Rahmen der Stockwerkrahmen sind meist als Rahmen mit eingespannten Stielen oder als zweistielige bezw. mehrstielige Rahmen mit Fußgelenk ausgebildet. Da sich das Berechnungsverfahren auch a sonstige mehrstielige Rahmenkonstruktionen anwenden läßt, sollen nachfolgend noch die Belastungen der

artiger Einzelrahmen infolge Knotenmomente angegeben werden. Die übrigen Belastungsfälle sind aus einschlagigen Formelnsammlungen zu entnehmen.

Rahmen mit eingespannten Stielen.

1) Gleichgerichtete Momente an den oberen Knoten 2 u.3

$$M_2 = -M_3 = M_1 = -M_4 = \frac{\acute{h}}{6 \cdot l' + \acute{h}} \quad (G.)$$

$$M_2 = -M_3 = -1 + \frac{\acute{h}}{6 \cdot l' + \acute{h}} \quad (Pf.)$$

2) Entgegengesetzt gerichtete Momente 2 und 3.

$$M_2 = M_3 = -\frac{2 \cdot \acute{h}}{l' + 2 \cdot \acute{h}} \quad (G.)$$

$$M_2 = M_3 = 1 - \frac{2 \cdot \acute{h}}{l' + 2 \cdot h} \quad (Pf.)$$

$$M_1 = M_4 = \frac{\acute{h}}{l' + 2 \cdot \acute{h}} \quad (G.)$$

Rahmen mit Fußgelenken.

1) Gleichgerichtete Momente 2 und 3

$$M_2 = -M_3 = -1 \ (Pf.); \quad M_2 = M_3 = 0 \ (G.)$$

2) Entgegengesetzt gerichtete Momente 2 und 3

$$M_2 = M_3 = -\frac{3 \cdot \acute{h}}{2 \cdot l' + 3 \cdot \acute{h}} \ (G.); \quad M_2 = M_3 = 1 - \frac{3 \cdot \acute{h}}{2 \cdot l' + 3 \cdot \acute{h}} \ (Pf.)$$

Der Belastungsfall eines Momentes im Knoten 2 oder 3 läßt sich ohne weiteres aus Fall 1 und 2 ableiten.

3. Der Einfluß der Normalkraft.

In den meisten Fällen kann auf die Berücksichtigung der Normalkraft verzichtet werden. Bei den Systemen, bei denen die Normalkräfte einen nennenswerten Einfluß ausüben, wie z.B. beim Pfostenträger, lassen sich schließlich die Untersuchungen noch vereinfachen, indem man nur die ausschlaggebenden Normalkräfte berücksichtigt. So können beim Pfostenträger die Normalkräfte in den Pfosten ohne weiteres vernachlässigt werden.

Bei der Untersuchung des Einzelrahmens werden ebenfalls die Normalkräfte je nach dem Genauigkeitsgrad der Berechnung ganz oder nur teilweise einzusetzen sein. Es dürfte vielfach genügen, die Normalkraft infolge äußerer Belastung in den Beiwerten c der Elastizitätsgleichungen in Rechnung zu stellen.

Die bisher entwickelten Formeln für den Einzelrahmen würden zu unübersichtlich, wenn man die Normalkräfte einbeziehen würde. Das trifft besonders zu bei dem beliebigen Viereckrahmen und dem Rahmen mit verschiedenen, geneigten Gurten. Daher sollen hier nur für den Rechteckrahmen die Aenderungen der auf Seite 15 entwickelten Formeln angegeben werden.

Entsprechend der Bezeichnung $s' = s \cdot \frac{I_o}{I}$ wird gewählt $s'' = s \cdot \frac{I_o}{F}$

Bei der Bestimmung der Horizontalkraft X im Zweigelenkrahmen erzeugt diese in den Stäben 1–4 und 2–3 die Normalkraft X bezw. 1 für X = 1. Durch die Knotenmomente Y entstehen dagegen in den Stäben 1–2 und 2–3 die Normalkräfte $\frac{Y}{h}$ bzw. $\frac{1}{h}$. Dasselbe trifft

zu für die äußeren Eckmomente M_1 oder M_4. In der Gleichung für X ändert sich daher nur w.

$$w = (s'_{12} + 3 \cdot s'_{23} + s'_{34}) + (s''_{14} + s''_{23}) \cdot \frac{3}{l^2}$$

Eine Knotenlast P erzeugt in dem Stab 2–3 des statisch bestimmten Grundsystems die Normalkräfte P oder o, je nachdem das Auflager 4 oder 1 als vertikal beweglich angenommen wird.

$$E \int N_o \cdot N_x \cdot ds'' = P \cdot s''_{23} \text{ oder } o.$$

Beim mehrfachen Rahmen kann man angenähert P auf beide Auflager verteilt annehmen, sodaß im Stabe 2–3 die Normalkraft $\frac{1}{2} \cdot P$ wirksam ist. Wird die Längenänderung der Pfosten vernachlässigt, so treten für w und X keine Aenderung der Formeln ein.

Bei Berechnung der Knotenmomente Y im Zweigelenkrahmen ergibt $Y_1 = 1$ in den Gurtstäben 1–2 und 3–4 die Normalkräfte $\pm \frac{1}{h} \cdot (M'_{2(1)} - M'_{3(1)}) = \pm \frac{1}{h}$ und ebenso $Y_4 = 1$. Damit ändern sich die Beiwerte a_1 und a_4 um den Betrag $+ o \cdot \frac{1}{h^2} \cdot (s''_{12} + s''_{34})$ und b um den gleichen Anteil, wobei für Momente Y mit verschiedenem Drehsinn das Vorzeichen (–) wird. Falls die Gurtstäbe gleich sind, wird

$$\frac{6}{h^2} \cdot (s''_{12} + s''_{34}) = \frac{12 \cdot l''}{h^2}$$

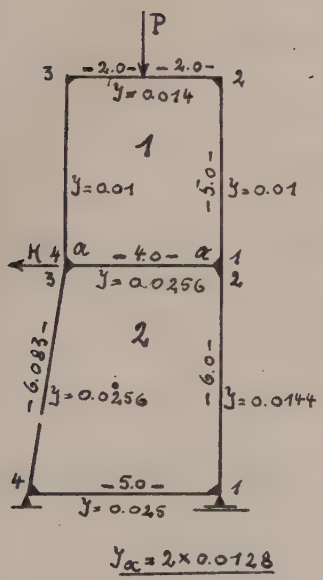
Die von X abhängigen Normalkräfte in den Pfosten sind dabei vernachlässigt.

Belastung durch Eckmomente M_2 oder M_4 läßt c unverändert. Da die Eckmomente als Knotenmomente in den Gelenken der Doppelstäbe gegenseitige Stützkräfte hervorrufen, ist nur dieser Fall maßgebend. Bei be-

lastung durch eine Knotenlast P werden in den Gurtstäben die Normalkräfte $\pm N^{\circ} \pm \frac{1}{h} \cdot (M_{2(0)} - M_{3(0)})$ bewirkt, und c ändert sich um den Betrag $6 \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[s''_{12} \cdot N^{\circ}_{12} + s''_{34} \cdot N^{\circ}_{34} + (s''_{12} + s''_{34}) \cdot \frac{M_{2(0)} - M_{3(0)}}{h} \right]$ oder bei gleichen Trägheitsmomenten der Gurte $\frac{6 \cdot l''}{h} \cdot \left(N^{\circ}_{12} + N^{\circ}_{34} + \frac{2 \cdot (M_{2(0)} - M_{3(0)})}{h} \right)$. Sind auch die Normalkräfte N°_{12} und N°_{34} gleich, wird die Aenderung von c ergeben $\frac{12 \cdot l''}{h} \cdot \left(N^{\circ} + \frac{M_{2(0)} - M_{3(0)}}{h} \right)$.

4. Der einfache Stockwerkrahmen.

Nach den in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Verfahren und Formeln möge zunächst der einfache Rahmen untersucht werden. Der in Fig. 21 dargestellte Rahmen ist belastet auf dem oberen Riegel (Pfosten) durch eine Einzellast P und in Höhe des mittleren Riegels durch eine Horizontalkraft H.



$y_\alpha = 2 \times 0.0128$

Fig. 21

Einzelrahmen 1.

Mittleres Trägheitsmoment $l_c = 0{,}01$

$\acute{s}_{14} = \acute{k}_{14} = 3{,}13$; $\acute{s}_{23} = \acute{k}_{23} = 2{,}87$

$\acute{s}_{12} = \acute{s}_{34} = \acute{l} = 5{,}0$

$k = 30{,}0 + 3{,}13 + 2{,}87 = 36$

$i = 25{,}0 + 60{,}0 + 27{,}0 = 112$

$\frac{3{,}13}{36} = 0{,}087$; $-1 + 0{,}087 = -0{,}913$

$\frac{5{,}0 \cdot 3{,}13}{112} = 0{,}14$; $\frac{3{,}13 \cdot (10{,}0 + 8{,}61)}{112} = 0{,}52$

$-1 + 0{,}52 = -0{,}48$

Die Belastung mit Knotenmoment $M_1 = 1$ (−) ergibt nach den Formeln auf S. mit $M = \frac{1}{2} \cdot M' + \frac{1}{2} \cdot M''$

$M_2 = +0{,}0435 - 0{,}07 = -0{,}0265$ mt

$M_3 = -0{,}0435 - 0{,}07 = -0{,}1135$ "

$M_4 = -0{,}0435 + 0{,}26 = +0{,}2165$ "

$M_1 = +0{,}0435 + 0{,}26 = +0{,}3035$ "

bzw. $-0{,}4565 - 0{,}24 = -0{,}6965$ "

Belastung mit Knotenmoment $M_4 = 1$ (−) gibt gleiche Werte bei Austausch der Ziffern 1 und 2 gegen 3 und 4.

Die Einzellast P = 10 t in der Mitte des Stabes 2-3

erzeugt mit n = 0,5 und $0,5 \cdot P \cdot h \cdot n \cdot (1-n) = 5,0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 5,0$ mt

$$M_1 = M_4 = + \frac{2,87 \cdot 5,0}{112} \cdot 5,0 = +0,64 \text{ mt};$$

$$M_2 = M_3 = - \frac{2,87 \cdot (10 + 9,39)}{112} \cdot 5 = - 2,48 \text{ mt}$$

Einzelrahmen 2.

$I_c = 0,025$; $\acute{s}_{14} = 7,83$; $\acute{s}_{32} = 5,0$

$\acute{s}_{12} = 10,42$; $\acute{s}_{34} = 5,95$

$w = 16 \cdot 18,25 + 25 \cdot 10,95 = 292 + 274 = 566$

$v_{1(2)} = 10,42$; $v_{3(2)} = 11,9 + 15,0 = 26,9$

$v_{1(4)} = 20,84 + 23,49 = 44,33$; $v_{3(4)} = 5,95$

$$M_{1(2)} = - \frac{16 \cdot 10,42 - 20 \cdot 26,9}{2 \cdot 566} = + 0,328$$

$$M_{3(2)} = + 1 + \frac{20 \cdot 10,42 - 25 \cdot 26,9}{1132} = + 0,590$$

$$M_{1(4)} = + 1 - \frac{16 \cdot 44,33 - 20 \cdot 5,95}{1132} = + 0,477$$

$$M_{3(4)} = + \frac{20 \cdot 44,33 - 25 \cdot 5,95}{1132} = + 0,652$$

$a_2 = (0,328 \cdot 10,42 + 0,59 \cdot 26,9 + 20,84 + 15,0) = 55,14$

$a_4 = (0,477 \cdot 44,33 + 0,652 \cdot 5,95 + 11,9 + 23,49) = 60,42$

$b = (0,328 \cdot 44,33 + 0,59 \cdot 5,95 + 10,42) = 28,45$

$m = 3335 - 810 = 2525$

Knotenmoment $M_1 = 1$ (-) ergibt

$$M_{1(0)} = + 16 \cdot \frac{7,83}{566} = + 0,207 \text{ mt bzw. } -1+0,207 = - 0,793 \text{ mt}$$

$$M_{3(0)} = - 20 \cdot \frac{7,83}{566} = - 0,2585 \text{ mt}$$

$c_2 = - 7,83 \cdot 2 \cdot 0,328 = - 5,14$;

$c_4 = - 7,83 \cdot (2 \cdot 0,477 + 1) = 15,28$

$$Y_2 = \frac{+ 5,14 \cdot 60,42 - 15,28 \cdot 23,45}{2525} = - 0,049 \text{ mt}$$

$$Y_4 = \frac{+ 15,28 \cdot 55,14 - 5,14 \cdot 28,45}{2525} = + 0,276 \text{ mt}$$

$M_1 = + 0,207 - 0,049 \cdot 0,328 + 0,276 \cdot 0,477 = + 0,323$ mt

$M_3 = - 0,2585 - 0,049 \cdot 0,590 + 0,276 \cdot 0,652 = - 0,107$ mt

Knotenmoment $M_4 = 1$ (-) ergibt

$M_{1(o)} = +\frac{1}{2}\cdot 0{,}207 = +0{,}1035$ mt;

$M_{3(o)} = -\frac{1}{2}\cdot 0{,}2585 = -0{,}1293$ mt

$c_2 = -\frac{1}{2}\cdot 5{,}14 = -2{,}57$; $c_4 = -7{,}33\cdot(0{,}477 + 2) = -19{,}35$

$Y_2 = \frac{+2{,}57\cdot 60{,}42 - 19{,}35\cdot 23{,}45}{2525} = -0{,}157$ mt

$Y_4 = \frac{+19{,}35\cdot 55{,}14 - 2{,}57\cdot 28{,}45}{2525} = +0{,}394$ mt

$M_1 = +0{,}1035 - 0{,}157\cdot 0{,}323 + 0{,}394\cdot 0{,}477 = +0{,}240$ mt

$M_3 = -0{,}1293 - 0{,}157\cdot 0{,}590 + 0{,}394\cdot 0{,}652 = -0{,}035$ mt

Äußere Belastung:

Die Auflagerkraft des oberen Rahmens P = 5,0 t im Knoten 3 (1) erzeugt, nach den beiden anschließenden Stäben zerlegt, eine Horizontalkraft

$H_1 = 5{,}0\cdot\frac{1}{6} = 0{,}835$ t (rechtsgerichtet). Außerdem greift die linksgerichtete Horizontalkraft

$H_2 = 5{,}835$ t im Knoten 3 an.

$H = 5{,}835 - 0{,}835 = 5$ t; $M'_{3(o)} = +5\cdot 6{,}0 = +30{,}0$ mt

$M_{3(o)} = 30\cdot(+1 - \frac{25\cdot 10{,}95}{566}) = +30 - 14{,}5 = +15{,}5$ mt

$M_{1(o)} = +30\cdot\frac{20\cdot 10{,}95}{566} = +11{,}6$ mt

$c_2 = +30\cdot(21{,}9\cdot 0{,}59 + 5{,}95) = 537$

$c_4 = +30\cdot(21{,}9\cdot 0{,}652 + 5{,}95) = 606$

$Y_2 = \frac{-537\cdot 60{,}42 + 606\cdot 28{,}45}{2525} = -6{,}02$ mt

$Y_4 = \frac{-606\cdot 55{,}14 + 537\cdot 28{,}45}{2525} = -7{,}16$ mt

$M_1 = +11{,}6 - 1{,}97 - 3{,}42 = +6{,}21$ mt

$M_3 = +15{,}5 - 3{,}55 - 4{,}67 = +7{,}28$ mt

Im Stockwerkrahmen ist der Mittelriegel a - a Doppelstab. I = 0,0128 Knotenmoment $Y_a^r = Y_1$ und $Y_a^l = Y_2$

Für die Elastizitätsgleichungen zur Bestimmung von Y_1 und Y_2 sind die Beiwerte

Momente im einfachen Rahmen.

Rahmen	Knoten	$M^r_{a=1}$	$M^b_{a=1}$		M_o	
1	2	− 0,0265	− 0,1135		− 2,48	
	3	− 0,1135	− 0,0265		− 2,48	
	4 G	+ 0,2165	+ 0,3035		+ 0,64	
	4 Pf		− 0,6965			
	1 G	+ 0,3035	+ 0,2165		+ 0,64	
	1 Pf	− 0,6965				
2	1 G	+ 0,323	+ 0,240		+ 6,21	
	1 Pf	− 0,677				
	4 G	+ 0,276	+ 0,394		− 7,16	
	4 Pf		− 0,606			
	3	− 0,107	− 0,035		+ 7,28	
	2	− 0,049	− 0,157		− 6,02	

$$a_1 = -4{,}0 \cdot \left[(-2 \cdot 0{,}6965 + 0{,}2165) + (-2 \cdot 0{,}677 + 0{,}276)\right] = 9{,}02$$

$$a_2 = -4{,}0 \cdot \left[(-1{,}176 + (-2 \cdot 0{,}695 + 0{,}240)\right] = 8{,}58$$

$$b = -4{,}0 \cdot \left[(+2 \cdot 0{,}2165 - 0{,}6965) + (+2 \cdot 0{,}276 - 0{,}677)\right] = +1{,}55$$

$$c_1 = -4{,}0 \cdot \left[3 \cdot 0{,}64 + (+2 \cdot 6{,}21 - 7{,}16)\right] = -28{,}72$$

$$c_2 = -4{,}0 \cdot \left[+1{,}92 + (-2 \cdot 7{,}16 + 6{,}21)\right] = +24{,}76$$

$$9{,}02 \cdot Y_1 + 1{,}55 \cdot Y_2 = +28{,}72$$

$$1{,}55 \cdot Y_1 + 8{,}58 \cdot Y_2 = +24{,}76$$

$$Y_1 = +3{,}79 \text{ mt}; \qquad Y_2 = +3{,}56 \text{ mt}$$

Auf der folgenden Seite sind zur besseren Übersicht die Momente in einer Tabelle zusammengestellt.

Das Beispiel zeigt, daß bei beliebigen Viereckrahmen die Rechenarbeit für den Einzelrahmen verhältnismäßig

groß wird. Dafür ist allerdings die weitere Berechnung mit Rücksicht auf das einfache statisch bestimmte Grundsystem kurz und übersichtlich. Die in diesem und den folgenden Beispielen vorhandenen geringen Ungenauigkeiten sind auf die Rechenschieber-Berechnung zurückzuführen.

Momente im Stockwerkrahmen.

Rahmen	Knoten	$Y_1 M'$	$Y_2 M'$	$\Sigma Y \cdot M'$	M_o	M
1	2	- 0,10	+ 0,405	+ 0,305	- 2,48	- 2,175
	3	- 0,43	+ 0,095	- 0,335	- 2,48	- 2,815
	4 G	+ 0,87	- 1,08	- 0,21	+ 0,64	+ 0,43
	4 Pf		+ 2,46	+ 3,33		+ 3,97
	1 G	+ 1,15	- 0,77	+ 0,38	+ 0,64	+ 1,02
	1 Pf	- 2,65		- 3,42		- 2,78
2	2 G	+ 1,23	- 0,86	+ 0,37	+ 6,21	+ 6,58
	2 Pf	- 2,57		- 3,43		+ 2,78
	3 G	+ 1,04	- 1,40	- 0,36	- 7,16	- 7,52
	3 Pf		+ 2,15	+ 3,19		- 3,97
	4	- 0,405	+ 0,125	- 0,28	+ 7,28	+ 7,00
	1	- 0,185	+ 0,560	+ 0,375	- 6,02	- 5,645

Stockwerkrahmen mit gleichen Gurten.

Der nebenstehende Rahmen ist durch eine rechtsgerichtete Horizontalkraft H = 1 t belastet. Als Doppelstäbe werden die Querpfosten a–a und b–b vorgesehen. Die Knotenmomente sind in beiden Gurten

für jeden Doppelstab gleich.

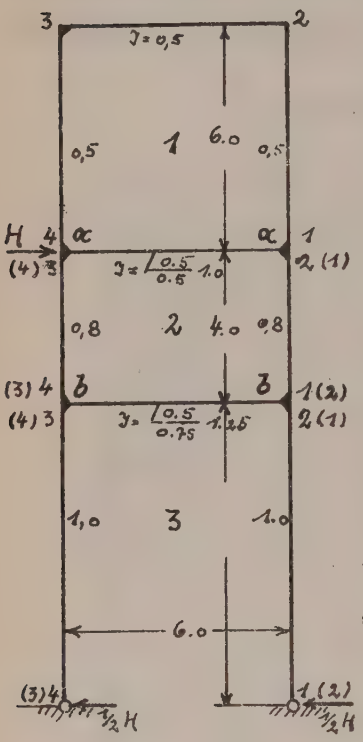


Fig. 22

Einzelrahmen 1.

$I_c = 0{,}5$

$\acute{h} = h = 6{,}0$; $\grave{l} = l = 6{,}0$

$k = 36 + 12 = 48$

Belastung $M_1 = -M_4 = 1$ mt in den Knoten 1 und 4:

$M_1' = M_2' = -M_4' = -M_3' = \frac{-6}{48} = -0{,}125$ mt

und im Stab 1–4 ist $M_1' = -M_4' = 0{,}875$ mt

Rahmen 2. $I_c = 0{,}5$

$\acute{h} = h = 6{,}0$; $\grave{l} = 2{,}5$;

$k = 15 + 12 = 27$

Belastung $M_1 = -M_4 = 1$ mt in den Knoten 1–4:

$M_1' = M_2' = -M_4' = -M_3' = \frac{-6}{27} = -0{,}222$ mt

und im Stab 1–4 ist $M_1' - M_4'$

$= 0{,}778$ mt $= M_b'$

Äußere Belastung gibt

$M_1 = -M_2 = M_3 = -M_4 = 1 \cdot \frac{4{,}0}{4} = 1$ mt

Rahmen 3. $I_c = 0{,}5$

$\acute{h} = 4{,}0$; $\grave{l} = 4{,}0$;

$k = 24 + 8 = 32$

Belastung

$M_{(1)} - M_{(4)} = 1$ mt in den Knoten (1) und (4):

$M_{(1)}' = M_{(4)}' = 0$ und im Stab (1)-(4) ist $M_{(1)}' = -M_{(4)}' = 1$ mt $= M_b'$

Infolge äußerer Belastung ist $M_{(1,2)} = M_{(3)} = 0$ und $M_{(1)} = -M_{(4)} = -1 \cdot \frac{8{,}0}{2} = -4{,}0$ mt. Die Gleichungen der beiden Unbekannten Y_1 und Y_2 der Knotenmomente in a und b haben folgende Beiwerte :

(Momente der Einzelrahmen sind auch aus nachstehender Tabelle zu ersehen)

$a_1 = 6 \cdot 0{,}875 + 6 \cdot 0{,}778 = 9{,}92$

$a_2 = 6 \cdot 0{,}778 + 4 \cdot 1{,}0 = 8{,}66$; $b = -6 \cdot 0{,}222 = -1{,}332$

$c_1 = -6 \cdot 1{,}0 = -6{,}0$; $c_2 = +6 \cdot 1{,}0 - 4 \cdot 4{,}0 = -10$

$$9{,}92 \cdot Y_1 - 1{,}332 \cdot Y_2 = 6{,}0$$
$$-1{,}332 \cdot Y_1 + 8{,}66 \cdot Y_2 = 10{,}0$$

$Y_2 = 1{,}27$ mt; $Y_1 = 0{,}775$ mt

Momente im Stockwerkrahmen.

Rahmen	Knoten	$Y_i' M'$	$Y_i' M'$	$\Sigma Y' M'$	M_o	M
1	2	−0,097				−0,097
	3	+0,097				+0,097
	4 G	+0,097				+0,097
	4 Pf	−0,678				−0,678
	1 G	−0,097				−0,097
	1 Pf	+0,678				+0,678
2	2 (1) G	−0,172	−0,281	−0,453	−1,00	−1,453
	2 (1) Pf	+0,603		+0,322		−0,678
	3 (4) G	+0,172	+0,281	+0,453	+1,00	+1,453
	3 (4) Pf	−0,603		−0,322		+0,678
	4 (3) G	+0,172	+0,281	+0,453	−1,00	−0,547
	4 (3) Pf		−0,989	−0,817		−1,817
	1 (2) G	−0,172	−0,281	−0,453	+1,00	+0,547
	1 (2) Pf		+0,989	+0,817		+1,817
3	(1) 2 G		0		−4,00	−4,00
	(1) 2 Pf		+1,27			−2,73
	(4) 3 G		0		+4,00	+4,00
	(4) 3 Pf		−1,27			+2,73
	Riegel-Momente:	$M_a = \pm 1{,}356$		$M_b = \pm 4{,}547$		

Verteilte Belastung des Gurtes.

Der linke Gurt des 2. Feldes sei durch eine gleichmäßig verteilte, horizontale Kraft p belastet. Um die Untersuchung für symmetrische Belastung mit gleichen

Knotenmomenten in den Gurten durchführen zu können, wird die Belastung zerlegt. Zunächst werden beide Gurte mit gleichgerichteter Kraft $\frac{1}{2}$ p und sodann mit entgegengesetzt gerichteter Kraft $\frac{1}{2}$ p belastet gedacht. Beim ersten Belastungsfall treten gleiche Knotenmomente mit gleichen Drehsinn und beim zweiten solche mit verschiedemem Drehsinn auf. Die Belastung sei p = 2,0 t/m.

1.) Belastung mit gleichgerichteter Kraft $\frac{1}{2}$ p auf beiden Gurten. Die Momente im Einzelrahmen infolge Belastung durch Knotenmomente sind die gleichen wie zuvor. Die äußere Belastung ergibt nach Formel 9, S.25 im

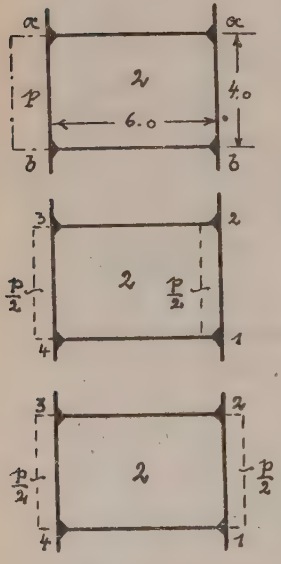


Fig. 23

Rahmen 2:

$$M_3 = -M_2 = \frac{1}{27}\cdot(2\cdot 2{,}5 + 6{,}0)\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4{,}0^2 = +3{,}26$$

$$M_4 = -M_1 = \frac{-1}{27}\cdot(4\cdot 2{,}5 + 6{,}0)\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4{,}0^2 = -4{,}74 \text{ mt}$$

Rahmen 3:

$$M_{(4)} = -M_{(4)} = \frac{1}{2}8{,}0\cdot 8{,}0 = 32{,}0 \text{ mt}$$

Die Beiwerte der Gleichungen für Y'_a und Y'_b sind $a_1 = 9{,}92$; $a_2 = 8{,}66$; $b = -1{,}332$; wie zuvor

$c_1 = -6{,}0\cdot 3{,}26 = -19{,}56$

$c_2 = +6{,}0\cdot 4{,}74 - 32\cdot 4{,}0 = -99{,}56$

Die Elastizitätsgleichungen lauten

$$9{,}92\cdot Y'_a - 1{,}332\cdot Y'_b = 19{,}56$$
$$-1{,}332\cdot Y'_a + 8{,}66\cdot Y'_b = 99{,}56$$

$Y'_a = 3{,}58$ mt, $Y'_b = 12{,}02$ mt

Momente im Stockwerkrahmen.

Rahmen	Knoten	$Y'_a M'$	$Y'_b M'$	$\Sigma Y' M'$	M_o	M
1	2	− 0,45				− 0,45
	3	+ 0,45				+ 0,45
	4 G	+ 0,45				+ 0,45
	4 Pf	− 3,13				− 3,13
	1 G	− 0,45				− 0,45
	1 Pf	+ 3,13				+ 3,13
2	2 (1) G	− 0,80	− 2,67	− 3,47	− 3,26	− 6,73
	(1) Pf	+ 2,78		+ 0,11		− 3,15
	3 (4) G	+ 0,80	+ 2,67	+ 3,47	+ 3,26	+ 6,73
	(4) Pf	− 2,78		− 0,11		+ 3,15
	4 (3) G	+ 0,80	+ 2,67	+ 3,47	− 4,74	− 1,27
	(3) Pf		− 9,35	− 8,55		−13,29
	1 (2) G	− 0,80	− 2,67	− 3,47	+ 4,74	+ 1,27
	(2) Pf		+ 9,35	+ 8,55		+13,29
3	(1) 2 G		0		− 32,00	− 32,00
	(1) Pf		+ 12,02			− 19,02
	(4) 3 G		0		+ 32,00	+ 32,00
	(4) Pf		− 12,02			+ 19,02
Riegel-Momente:			$M_a = - 6,28$		$M_b = - 32,27$	

2, Belastung mit entgegengesetzt gerichteter Kraft ½p auf den Gurten.

Für die Momente in den Einzelrahmen infolge äußerer Belastung vergleiche Formel 10 S. 25

Rahmen 1:

$i = 36 + 144 + 108 = 288$

Belastung $M''_{1+} = + 1$

$$M''_2 = M''_3 = + \frac{6 \cdot 6}{288} = + 0{,}125 \text{ mt}$$

$$M''_1 = M''_4 = - \frac{6 \cdot (12 + 18)}{288} = - 0{,}625 \text{ mt (G)}$$

Im Doppelstab a–a ist $M''_a = + 1 - 0{,}625 = + 0{,}375$ mt

Rahmen 2:

$i = 6{,}25 + 60 + 108 = 174{,}25;$

Belastung $M''_{14} = + 1$

$$M''_2 = M''_3 = + \frac{2{,}5 \cdot 6}{174{,}25} = + 0{,}086 \text{ mt};$$

$$M''_1 = M''_4 = - \frac{6 \cdot (5 + 18)}{174{,}25} = - 0{,}792 \text{ mt (G)}$$

Im Doppelstab b–b ist $M''_b = + 1 - 0{,}792 = + 0{,}208$ mt

Die Belastung $\frac{1}{2} \cdot p$ ergibt

$$M_1 = M_4 = M_2 = M_3 = - \frac{(18 + 2{,}5) \cdot 2{,}5}{174{,}25} \cdot 1 \cdot \frac{4^2}{12} =$$

$$- 0{,}294 \cdot \frac{16}{12} = - 0{,}392 \text{ mt}$$

Rahmen 3:

Belastung $M''_{23} = + 1$

$$M''_2 = M''_3 = \frac{-12}{8+12} = - 0{,}60 \text{ mt (G)};$$

$M''_2 = M''_3 = + 1 - 0{,}60 = + 0{,}40$ mt (Pf)

Die äußere Belastun beansprucht nur den Einzelrahmen 2.

Als Unbekannte sind vorhanden die Knotenmomente $Y''^{l}_a = Y''^{r}_a =$ und $Y''^{l}_b = Y''^{r}_b = Y''_b$.

Für die Gleichungen sind mit $I_c = 0{,}5$ die Beiwerte

$a_1 = + 6{,}0 \cdot (0{,}375 + 0{,}208) = + 3{,}498$

$a_2 = + 6{,}0 \cdot 0{,}208 + 4{,}0 \cdot 0{,}4 = + 2{,}848$

$b = + 6{,}0 \cdot 0{,}086 = + 0{,}516$

$c_1 = c_2 = - 6{,}0 \cdot 0{,}392 = - 2{,}352$

Die Gleichungen für Y''_a und Y''_b lauten

$3{,}498 \cdot Y''_a + 0{,}516 \cdot Y''_b = 2{,}352$

$0{,}516 \cdot Y''_a + 2{,}848 \cdot Y''_b = 2{,}352$

$Y''_b = 1{,}28 \cdot Y''_a$; $Y''_a = 0{,}564$ mt; $Y''_b = 0{,}722$ mt;

Die Momente sin in der nachfolgende Tabelle zu den Werten M'' im Stockwerkrahmen und weiter mit den Werten M' zu den endgültigen Momenten entwickelt.

Momente im Stockwerkrahmen.

Rahmen	Knoten	$\gamma''_a M''$	$\gamma''_b M''$	$\Sigma \gamma'' \cdot M''$	M_o	M''	M'	M
1	2	+0,071				+0,071	− 0,45	−0,379
	3	+0,071				+0,071	+ 0,45	+0,521
	4 G	−0,353				−0,353	+ 0,45	+0,097
	4 Pf	+0,211				+0,211	− 3,13	−2,919
	1 G	−0,353				−0,353	− 0,45	−0,803
	1 Pf	+0,211				+0,211	+ 3,13	+3,341
2	2 (1) G	−0,447	+0,062	−0,385	−0,392	−0,777	− 6,73	−7,507
	(1) Pf	+0,117		+0,179		−0,213	− 3,15	−3,363
	3 (4) G	−0,447	+0,062	−0,385	−0,392	−0,777	+ 6,73	+5,953
	(4) Pf	+0,117		+0,179		−0,213	+ 3,15	+2,937
	4 (3) G	+0,048	−0,572	−0,524	−0,392	−0,916	− 1,27	− 2,186
	(3) Pf		+0,150	+0,198		−0,194	−13,29	−13,484
	1 (2) G	+0,048	−0,572	−0,524	−0,392	−0,916	+ 1,27	+ 0,354
	(2) Pf		+0,150	+0,198		−0,194	+13,29	+13,096
3	(1) 2 G		− 0,433			−0,433	− 32,00	−32,433
	2 Pf		+0,289			+0,289	−19,98	−19,691
	(4) 3 G		−0,433			− 0,433	+ 32,00	+31,567
	3 Pf		+0,289			+ 0,289	+19,98	+20,269

Riegel-Momente:

$M^r_a = -(3,341 + 3,363) = -6,704$ mt

$M^l_a = +(2,919 + 2,937) = +5,856$ mt

$M^r_b = -(19,691 + 13,096) = -32,787$ mt

$M^l_b = +(20,269 + 13,484) = +33,753$ mt

Belastung des Riegels.

Bei gleichmäßig verteilter Belastung und bei symmetrisch angreifenden Lasten treten nur Knotenmomente auf, die in beiden Gurten gleich mit verschiedenem Drehsinn sind. Wird dagegen der Riegel durch beliebige Streckenlasten oder durch Einzellasten unsymmetrisch belastet, dann werden wieder zweckmäßig zwei symmetrische Belastungsfälle eingeführt.

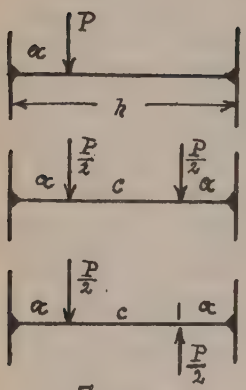


Fig. 24

Die Belastung durch eine beliebig angreifende Einzellast P wird ersetzt durch die Belastung zweier, symmetrisch angreifender Kräfte $\frac{1}{2}$ P und die Belastung durch ein Kräftepaar $\frac{1}{2} \cdot P \cdot c$ (Fig.24). Mit a = n·h ist das Moment der beiden Kräfte $\frac{1}{2} \cdot P \cdot n \cdot h$;

Die Momente im Einzelrahmen infolge dieser Belastung sind nach den Formeln S. 24 zu berechnen. Für die Gleichungen der zugehörigen Knotenmomente Y''_p ist $c''_p = \frac{1}{2} \cdot h \cdot n \cdot (1-n) \cdot (P \cdot \bar{h} \cdot M''_{p(n-1)} + P_n \cdot h'_n \cdot M''_{p(n)})$

Das Kräftepaar P·c erzeugt

$$M_o = \frac{1}{2} \cdot P \cdot h \cdot n \cdot (1-2\,n)$$

Für die zugehörigen Knotenmomente Y'_p ist

$$c'_p = \frac{1}{2} \cdot h \cdot n \cdot (1-n) \cdot (1-2\,n) \cdot (P \cdot h' \cdot M'_{p(n-1)} + P_n \cdot h'_n \cdot M'_{p(n)})$$

Bei durchgehender, verteilter Last p wird

$$c''_p = \frac{h}{12} \cdot (-p \cdot \bar{h} \cdot M''_{p(n-1)} + p_n \cdot h'_n M''_{p(n)})$$

In den Stockwerkrahmen Fig. 22 ist der Riegel a–a durch eine Einzellast P=2 t belastet. Die unsymmetrisch angreifende Last wird durch 2 symmetrisch angreifende Lasten P = 1 t und durch ein Kräftepaar P·c = 1·3,0 mt ersetzt.

Der Doppelstab a–a hat die Trägheitsmomente $I' = I'' = \frac{1}{2} \cdot I = 0{,}5$; $I_o = 0{,}5$. Auf jeden Teil des Doppelstabes entfällt demnach $\frac{1}{2} \cdot P$ bezw. $\frac{1}{4} \cdot P$.

Belastung durch 2 gleichgerichtete Kräfte 0,5 t:

n = 0,25; nach der Formel 6 S. sind die Momente im

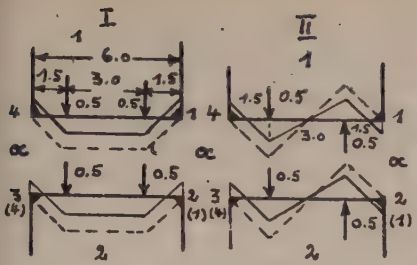


Fig. 25

Rahmen 1:

$M'_o = -0,5 \cdot 1,5 = -0,75$ mt (Grundsystem)

$M_{2(o)} = M_{3(o)} = -\frac{6 \cdot 6}{288} \cdot 0,5 \cdot 6,0 \cdot 0,25 \cdot 0,75 =$

$-0,125 \cdot 0,562 = -0,07$ mt

$M_{1(o)} = M_{4(o)} = +\frac{6 \cdot (18 + 12)}{288} \cdot 0,562 =$

$0,625 \cdot 0,562 = +0,352$ mt

Rahmen 2:

$M'_o = +0,75$ mt; $M_{1(o)} = M_{4(o)} = +\frac{2,5 \cdot 6}{174,25} \cdot 0,562 =$

$+0,086 \cdot 0,562 = +0,0485$ mt

$M_{2(o)} = M_{3(o)} = -\frac{6 \cdot (18 + 5)}{174,25} \cdot 0,562 = -0,792 \cdot 0,562 =$

$-0,445$ mt.

Rahmen 3: unbelastet.

Die Beiwerte der Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten Y''_1 und Y''_2 (+) sind bekannt.

$c_1 = 0,75 \cdot 0,75 \cdot 6 \cdot (-0,375 + 0,208) = -3,375 \cdot 0,167 =$

$-0,564$; $c_2 = +3,375 \cdot 0,086 = +0,29$ mt

$$3,498 \cdot Y''_1 + 0,516 \cdot Y''_2 = 0,564$$

$$0,516 \cdot Y''_1 + 2,848 \cdot Y''_2 = -0,29$$

$Y''_1 = +0,181$ mt; $Y''_2 = -0,135$ mt.

Die Belastung durch das Kräftepaar erzeugt im

Rahmen 1:

$M_o = \pm 0,5 \cdot 6 \cdot 0,25 \cdot 0,5 = \pm 0,375$ mt

$M_{1(o)} = -M_{4(o)} = M_{2(o)} = -M_{3(o)} = -\frac{6}{48} \cdot 0,375 \cdot 0,75 = -0,0352$ mt

Rahmen 2:

$M_{1(o)} = -M_{4(o)} = M_{2(o)} = -M_{3(o)} = +\frac{6}{27} \cdot 0,375 \cdot 0,75 =$

$+0,22 \cdot 0,282 = +0,0625$ mt.

Rahmen 3: unbelastet

In den Gleichungen für Y_1' und Y_2' ist nach S.44 u. 45

$c_1 = 0{,}375 \cdot 0{,}75 \cdot 6 \cdot (+\,0{,}875 - 0{,}778) = +\,1{,}685 \cdot 0{,}097$

$= +\,0{,}163$

$c_2 = +\,1{,}685 \cdot 0{,}222 = +\,0{,}373$

$$9{,}92 \cdot Y_1' - 1{,}332 \cdot Y_2' = -\,0{,}163$$

$$-\,1{,}332 \cdot Y_1' + 8{,}66 \cdot Y_2' = -\,0{,}373$$

$Y_2' = -\,0{,}0465$ mt; $Y_1' = -\,0{,}0227$ mt

Die Momente sind in folgender Tabelle zusammengestellt

Rahmen	Knoten	$Y_1' \cdot M''$	$Y_2'' \cdot M''$	$\Sigma Y'' \cdot M''$	M_o	M
1	2	+0,0226			−0,070	+0,0474
	3	+0,0226			−0,070	+0,0474
	4 G	−0,113			+0,352	+0,239
	4 Pf	+0,068				+0,420
	1 G	−0,113			+0,352	+0,239
	1 Pf	+0,068				+0,420
2	2 (1) G	−0,1433	−0,0116	−0,1549	−0,4455	−0,6004
	2 (1) Pf	+0,0377		+0,0261		−0,4194
	3 (4) G	−0,1433	−0,0116	−0,1549	−0,4455	−0,6004
	3 (4) Pf	+0,0377		+0,0261		−0,4194
	4 (3) G	+0,0157	+0,107	+0,1227	+0,0485	+0,1712
	4 (3) Pf		−0,028	−0,0123		+0,0362
	1 (2) G	+0,0157	+0,107	+0,1227	+0,0485	+0,1712
	1 (2) Pf		−0,028	−0,0123		+0,0362
3	(1) 2 G		+0,081			+0,081
	(1) 2 Pf		−0,054			−0,054
	(4) 3 G		+0,081			+0,081
	(4) 3 Pf		−0,054			−0,054

Rahmen	Knoten	$Y_1' M'$	$Y_2' M'$	$\Sigma Y' M'$	M_o	M'	M''	M
1	2	+0,0028			−0,0352	−0,0324	+0,0474	+0,0150
	3	−0,0028			+0,0352	+0,0324	+0,0474	+0,0798
	4 G	−0,0028			+0,0352	+0,0324	+0,2390	+0,2714
	4 Pf	+0,0199				+0,0551	+0,4200	+0,4751
	1 G	+0,0028			−0,0352	−0,0324	+0,2390	+0,2066
	1 Pf	−0,0199				−0,0551	+0,4200	+0,3649
2	2 (1) G	+0,0051	+0,0103	+0,0154	+0,0625	+0,0779	−0,6004	−0,5225
	2 (1) Pf	−0,0176		−0,0073		+0,0552	−0,4194	−0,3642
	3 (4) G	−0,0051	−0,0103	−0,0154	−0,0625	−0,0779	−0,6004	−0,6783
	3 (4) Pf	+0,0176		+0,0073		−0,0552	−0,4194	−0,4746
	4 (3) G	−0,0051	−0,0103	−0,0154	−0,0625	−0,0779	+0,1712	+0,0933
	4 (3) Pf		+0,0362	+0,0311		−0,0314	+0,0362	+0,0048
	1 (2) G	+0,0051	+0,0103	+0,0154	+0,0625	+0,0779	+0,1712	+0,2491
	1 (2) Pf		−0,0362	−0,0311		+0,0314	+0,0362	+0,0676
3	(1) 2 G		0				+0,0810	+0,0810
	(1) 2 Pf		−0,0465				−0,0540	−0,1005
	(4) 3 G		0				+0,0810	+0,0810
	(4) 3 Pf		+0,0465				−0,0540	−0,0075

Riegel-Momente:

$M_a^l = -(0,4751 + 0,4746) = -0,9497\ mt$; $M_b^l = -(0,0048 + 0,0075) = -0,0123\ mt$

$M_a^r = -(0,3649 + 0,3642) = -0,7291\ mt$; $M_b^r = -(0,0676 + 0,1005) = -0,1681\ mt$

Der einfache Stockwerkrahmen mit gleichen, geneigten Gurten.

Der Stockwerkrahmen mit geneigten Gurten gleichen Querschnittes kann in derselben Weise behandelt werden. Wie im Abschnitt über Einzelrahmen erwähnt wurde, läßt sich die Wirkung vertikaler Knotenlasten durch die einer Horizontalkraft im oberen Riegel bzw. im Teilstab des Doppelstabes darstellen, wenn die genannten Kräfte in Richtung der Gurtstäbe und des Riegels zerlegt werden. Um für die Momente im Einzelrahmen einfache Formeln wie beim Rahmen mit parallelen Gurten zu erhalten,

werden die Doppelstäbe nach Möglichkeit so geteilt, daß folgende Beziehungen bestehen:

$h_o = h$; $h_u = m \cdot h$; $I_u = m \cdot I_o$; $h'_o = h'_u = h'$

1) Belastung durch 2 Momente gleichen Drehsinns in den Knoten 1 und 4.

$$k' = 2 \cdot s'_l \cdot (1 + m + m^2) + h' \cdot (1 + m^2)$$

$$M'_2 = -M'_3 = -\frac{m \cdot h'}{k'} \; ; \; M'_1 = -M'_4 = -\frac{m^2 \cdot h}{k'} \quad (G);$$

$$M'_1 = -M'_4 = 1 - \frac{m^2 \cdot h'}{k'} \quad (Pf);$$

Dieselbe Belastung in den Knoten 2 und 3 bei Stützung des Rahmens an diesen Knoten gibt

$$M'_1 = -M'_4 = \frac{-m \cdot h'}{k'};$$

$$M'_2 = -M'_3 = -\frac{h'}{k'} \quad (G);$$

$$M'_2 = -M'_3 = 1 - \frac{h'}{k'} \quad (Pf)$$

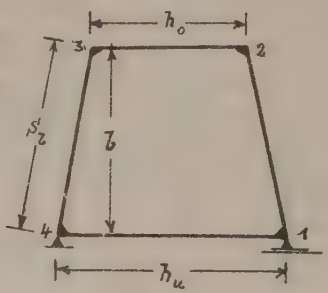


Fig. 26

2) Belastung durch 2 Momente verschiedenen Drehsinnes in den Knoten 1 und 4.

$$i' = s'^2_l + 4 s'_l \cdot h' + 3 \cdot h'$$

$$M''_2 = M''_3 = \frac{s'_l \cdot h'}{i'} \; ; \; M''_1 = M''_4 = -\frac{(2 \cdot s'_l + 3 \cdot h') \cdot h'}{i'} \quad (G)$$

bezw. $= 1 - \frac{(2 \cdot s'_l + 3 \cdot h') \cdot h'}{i'}$ (Pf)

Dieselbe Belastung in den Knoten 2 und 3 bei Stützung des Rahmens an diesen Knoten gibt gleichwertige Momente.

3) Belastung durch horizontale Knotenlast H.

$$M_2 = -M_3 = -\frac{s'_l \cdot (1+2m) + m \cdot h'}{k'} \cdot \frac{Q \cdot l}{2}$$

$$M_1 = -M_4 = +\frac{s'_l \cdot (2+m) + h'}{k'} \cdot \frac{Q \cdot l}{2}$$

In gleicher Weise lassen sich auch für andere Belastungsfälle Formeln aufstellen, die denen für symmetrische Rechteckrahmen entsprechen.

5. Der Pfostenträger.

Der nachstehend abgebildete Pfostenträger mit parallelen Gurten hat gleiche Querschnitte im Ober- und Untergurt in den einzelnen Feldern. Bei Knotenlasten treten im Ober- und Untergurt bei jedem Doppelstab gleiche Knotenmomente mit gleichem Drehsinn M' und bei gleicher, entgegengesetzt wirkender Belastung der Gurte zwischen den Knoten gleiche Knotenmomente verschiedenem Drehsinn M" auf.

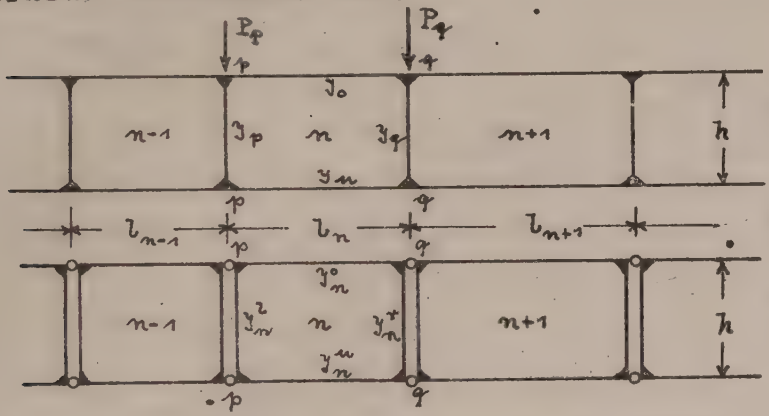


Fig. 27

Die als Doppelstäbe vorgesehenen Mittelpfosten werden wieder mit a bis r, die Felder oder Einzelrahmen mit 1 bis n bezeichnet. Momente in den Einzelrahmen sind positiv, wenn sie auf der Innenseite Zugspannung erzeugen. Bei den Gurten werden im gleichen Sinne wirkende Momente und bei den Pfosten linksdrehende als positiv bezeichnet.

Da die Pfostenquerschnitte nach dem Auflager hin meist zunehmen, wird es fast immer möglich sein, bei Trägern mit ungerader Feldzahl die Doppelstäbe so zu wählen, daß sämtliche Einzelrahmen gleiche Pfosten erhalten. Träger mit gerader Feldzahl haben, wenn nicht ein

günstiger Fall vorliegt, 2 Einzelrahmen mit verschiedenen Pfosten.

Der Einfluß der Normalkräfte wird bei den folgenden Beispielen nicht berücksichtigt. Hierauf wird in einem späteren Abschnitt noch näher eingegangen. Im übrigen ist der Rechnungsgang der gleiche wie bei dem einfachen Stockwerkrahmen im vorigen Abschnitt. Die Einzelrahmen stützen sich bei Belastung durch die Knotenmomente gegeneinander und bei äußerer Belastung nach der Mitte zu, dem Verlauf der Gurtkräfte entsprechend, gegen einander ab. Die auf den Einzelrahmen wirkende Querkraft ist $Q_n = Q_{n-1} - P_p = Q_{n+1} + P_q$.

Pfostenträger mit Knotenlasten.

Der Pfostenträger Fig. 28 ist durch eine Einzellast P = 10 t im Knoten c des Obergurtes belastet. Die Auflagerkräfte sind A = 2,0 t und B = 8,0 t.

Querkräfte: $Q_1 = Q_2 = 2{,}0$ t; $Q_3 = 2{,}0$t; $Q_4 = -\,8{,}0$ t;

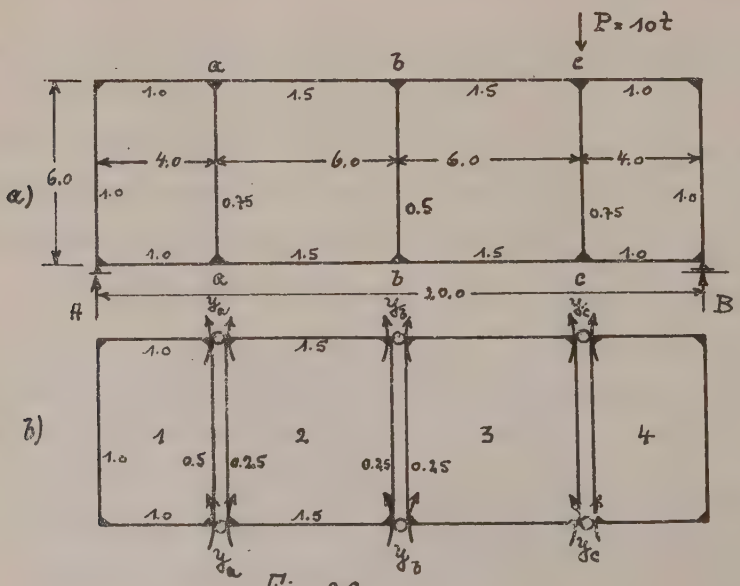


Fig. 28

Normalkräfte in den Knoten:

$-O_\alpha = +U_\alpha = \frac{2\cdot 4}{6} = 1{,}33$ t;

$-O_b = +U_b = \frac{2\cdot 10}{6} = 3{,}33$ t;

$-O_c = +U_c = \frac{8\cdot 4}{6} = 5{,}33$ t;

Die Unbekannten sind die Knotenmomente $Y'^{o}_{c} = Y'^{u}_{c} = Y'_c$, $Y'^{o}_{\alpha} = Y'^{u}_{\alpha} = Y'_\alpha$ und $Y'^{o}_{b} = Y'^{u}_{b} = Y'_b$. Das mittlere Trägheitsmoment ist $I_c = 0{,}25$.

Rahmen 1: $h'_{23} = 1{,}5$

$l' = 1{,}0$; $h'_{14} = 3{,}0$; $k = 6\cdot 1 + 1{,}5 + 3{,}0 = 10{,}5$

Belastung $M'_{14} = 1$ $(\mp)$

$M'_1 = M'_2 = -M'_4 = -M'_3 = \frac{3{,}0}{10{,}5} = 0{,}286$ mt; Stab 1–4:

$M'_\alpha = \mp 0{,}714$ mt

Belastung Q:

$M_{(o)} = \pm 2{,}0\cdot\frac{4}{4} = \pm 2{,}0$ mt; $M_{1(o)} = -M_{4(o)} =$

$\frac{3\cdot 1{,}0 + 1{,}5}{10{,}5}\cdot 2{,}0\cdot 2 = 0{,}428\cdot 4 = +1{,}712$ mt

$M_{2(o)} = -M_{3(o)} = -\frac{3\cdot 1{,}0 + 3{,}0}{10{,}5}\cdot 2{,}0\cdot 2 = -0{,}572\cdot 4 = -2{,}288$ mt

Rahmen 2:

$l' = 1{,}0$; $h'_{14} = h'_{23} = h' = 6{,}0$; $k = 6 + 12 = 18$

Belastung $M'_{14} = 1$ $(\mp)$

$M'_1 = M'_2 = -M'_{4/3} = \frac{6}{18} = 0{,}333$ mt;

Stab 1 – 4: $M'_b = 0{,}667$ mt

Belastung $M'_{(1)(4)} = 1$ für Doppelstab a–a gibt gleiche Momente mit () Ziffern.

Belastung Q:

$M_{(o)} = \pm 2{,}0\cdot\frac{6}{4} = \pm 3{,}0$ mt; $M_{1(o)} = M_{3(o)} = -M_{2(o)} = -M_{4(o)} = 3{,}0$ mt;

Rahmen 3:

Momente für Belastung M′und Q wie im Rahmen 2.

Rahmen 4:

$l' = 1{,}0$; $K_{23} = 3{,}0$; $K_{14} = 1{,}5$; $k = 10{,}5$;

Belastung $M'_{14} = 1$ $(\overline{+})$ wie im Rahmen 1.

Belastung Q:

$$M'_{(o)} = \pm 8{,}0 \cdot \frac{4}{4} = \pm 8{,}0 \text{ mt};$$

$$M_{1(o)} = -M_{4(o)} = 0{,}428 \cdot 16 = +6{,}848 \text{ mt}$$

$$M_{2(o)} = -M_{3(o)} = -0{,}572 \cdot 16 = -9{,}152 \text{ mt}$$

Für die Gleichungen der Unbekannten Y'_a , Y'_b , Y'_c ist mit $I_c = 0{,}25$

$$a_1 = a_3 = 6{,}0 \cdot \left(\frac{0{,}25}{0{,}5} \cdot 0{,}714 + 1 \cdot 0{,}667\right) = 6{,}14$$

$$a_2 = 6{,}0 \cdot 1 \cdot 0{,}667 \cdot 2 = 8{,}0.$$

$$b_2 = b_3 = -6{,}0 \cdot 1 \cdot 0{,}333 = -2{,}0$$

$$c_1 = -6{,}0 \cdot \left(\frac{0{,}25}{0{,}5} \cdot 1{,}712 - 1 \cdot 3{,}0\right) = +12{,}86$$

$$c_2 = -6{,}0 \cdot (-3{,}0 + 3{,}0) = 0$$

$$c_3 = -6{,}0 \cdot \left(+3{,}0 + 6{,}85 \cdot \frac{0{,}25}{0{,}5}\right) = -38{,}55$$

$$6{,}14 \cdot Y'_a - 2{,}0 \cdot Y'_b = -12{,}86$$

$$-2{,}0 \cdot Y'_a + 8{,}0 \cdot Y'_b - 2{,}0 \cdot Y'_c = 0$$

$$-2{,}0 \cdot Y'_b + 6{,}14 \cdot Y'_c = +38{,}55$$

$Y'_c = +6{,}69$ mt; $Y'_b = +1{,}25$ mt; $Y'_a = -1{,}685$ mt.

Momente im Pfostenträger.

Rahmen	Knoten	$Y'_a M'$	$Y'_b M'$	$Y'_c M'$	$\Sigma Y' M'$	M_o	M
1	2	−0,482				−2,29	−2,772
	3	+0,482				+2,29	+2,772
	4 G	+0,482				−1,71	−1,228
	4 Pf	−1,203					−2,913
	1 G	−0,482				+1,71	+1,228
	1 Pf	+1,203					+2,913

Forts. S. 53

Rahmen	Knoten	$Y'_\alpha M'$	$Y'_b M'$	$Y'_c M'$	$\Sigma Y' M'$	M_o	M
2	2 (1) G	− 0,562	+ 0,416		− 0,146	− 3,0	− 3,146
	Pf	+ 1,123			+ 1,539		− 1,461
	3 (4) G	+ 0,562	− 0,416		+ 0,146	+ 3,0	+ 3,146
	Pf	− 1,123			− 1,539		+ 1,461
	4 (3) G	+ 0,562	− 0,416		+ 0,146	− 3,0	− 2,854
	Pf		+ 0,834		+ 1,396		− 1,604
	1 (2) G	− 0,562	+ 0,416		− 0,146	+ 3,0	+ 2,854
	Pf		− 0,834		− 1,396		+ 1,604
3	1 (2) G		+ 0,416	+ 2,23	+ 2,646	− 3,0	− 0,354
	Pf		− 0,834		+ 1,396		− 1,604
	4 (3) G		− 0,416	− 2,23	− 2,646	+ 3,0	+ 0,354
	Pf		+ 0,834		− 1,396		+ 1,604
	3 (4) G		− 0,416	− 2,23	− 2,646	− 3,0	− 5,646
	Pf			+ 4,46	+ 4,044		+ 1,044
	2 (1) G		+ 0,416	+ 2,23	+ 2,646	+ 3,0	+ 5,646
	Pf			− 4,46	− 4,044		− 1,044
4	1 G			+ 1,91		+ 6,85	+ 8,76
	Pf			− 4,78			+ 2,07
	4 G			− 1,91		− 6,85	− 8,76
	Pf			+ 4,78			+ 2,07
	3			− 1,91		+ 9,15	+ 7,24
	2			+ 1,91		− 9,15	− 7,24

Momente d. Mittelpfosten: $M^o_\alpha = -M^u_\alpha = -2,913 - 1,46 = -4,374$

$M^o_c = -M^u_c = 1,044 + 2,07 = 3,114.$ $M^o_b = -M^u_b = -1,604 - 1,604 = -3,208$

Pfostenträger mit Gurtbelastung.

Wie bereits früher angegeben wurde, ist bei Belastung 1 Gurtes durch verteilte Last oder Einzellasten zwischen den Knoten die Herstellung der Symmetrie vorteilhaft. Demgemäß wird die halbe Last auf beide Gurte einmal in gleicher Richtung und dann in entgegengesetzter Richtung wirkend angenommen.

Der Obergurt des Pfostenträgers Fig. 29 ist im Felde 3 mit der gleichmäßig verteilten Kraft p belastet. Zunächst wird also die Last ½p auf Ober- und Untergurt abwärts wirkend angenommen. Man kann dabei den Einzelrahmen 3 durch die Querkräfte Q_b und Q_c als Auflagerkräfte gestützt denken.

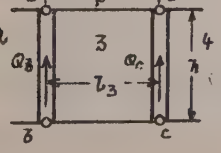


Fig. 29

Außer den Momenten infolge der Knotenlasten sind im Rahmen 3 zusätzlich die Momente infolge Belastung p beider Gurte nach Formel 11 S. 25 mit der angegebenen Stützung zu ermitteln. In der weiteren Berechnung ist nur noch die Änderung der Beiwerte c_2 und c_3 der Gleichungen infolge obiger Zusatzmomente zu berücksichtigen.

Der zweite zugehörige Belastungsfall erzeugt im statisch unbestimmten Hauptsystem nur im Rahmen 3 Momente infolge entgegengesetzter Belastung p beider Gurte. Diese Momente sind nach Formel 12 S. 25 zu bestimmen. Im Pfostenträger selbst ergibt dieser Belastungsfall Knotenmomente, die in beiden Gurten bei verschiedenem Drehsinn gleich sind. Die endgültigen Momente sind dann $M = \frac{1}{2} \cdot (M' + M'')$

Pfostenträger mit parallelen, ungleichen Gurten.

Wie bereits im ersten Abschnitt ausgeführt wurde, sind verschiedene Möglichkeiten vorhanden, um bei diesem Träger, der verschiedene Knotenmomente in beiden Gurten hat, die Zahl der Unbekannten bezw. der Elastizitätsgleichungen zu vermindern. Das vorliegende Beispiel soll so berechnet werden, daß die unbekannten Knotenmomente der Reihe nach für Ober- und Untergurt jedes Doppelstabes ermittelt werden, wie im Abschnitt 1 näher erläutert wurde. Die maßgebenden Formeln sind auf S. 24 zu er-

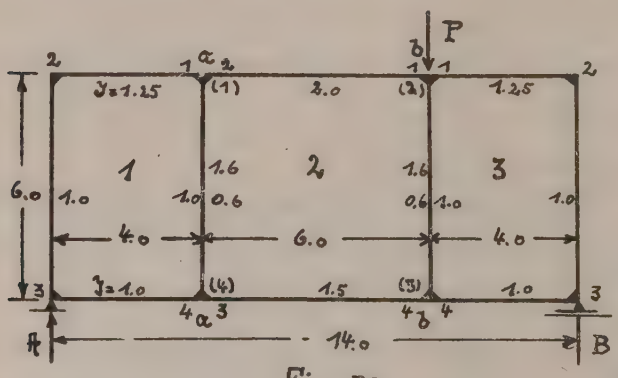


Fig. 30

sehen. Im übrigen ist der Gang der Berechnung wie zuvor. Es lassen sich dabei sinngemäß die Formeln S. 27 und 28 vorteilhaft verwenden.

Die Auflagerkräfte sind A = 2,857 t; B = 7,143 t;

$I_c = 1$

Rahmen 1:

$l'' = l \cdot \frac{I_c}{I_{ac}} = 4{,}0$; $l' = l \cdot \frac{I_c}{I_c} = 3{,}2$; $k_{12} = k_{23} = k = 6{,}0$

$2 \cdot k + 3 \cdot l'' = 24{,}0$; $2 \cdot k + 3 \cdot l' = 21{,}6$;

$3 \cdot h' + l'' = 22{,}0$; $3 \cdot h' + l' = 21{,}2$;

$k = 36{,}0 + 7{,}2 = 43{,}2$; $i = 36{,}0 + 86{,}4 + 38{,}4 = 160{,}8$;

$+ \frac{3 \cdot h'}{k} = + \quad 0{,}416$; $- 1 + 0{,}416 = 0{,}584$;

$+ \frac{l' \cdot h'}{i} = + \quad 0{,}119$; $- \frac{l' \cdot (2 \cdot h' + 3 \cdot l'')}{i} = - 0{,}478$;

$1 - 0{,}478 = 0{,}522$

$+ \frac{l'' \cdot h'}{i} = + \quad 0{,}149$; $- \frac{l'' \cdot (2 \cdot h' + 3 \cdot l')}{i} = - 0{,}538$;

$1 - 0{,}538 = 0{,}462$.

Mit obigen Werten sind die Momente im Rahmen zu errechnen.

Das an 1 Knoten angreifende Moment $M_1 = 1$ wird nach den Formeln für die Belastung mit 2 Momenten gleichen bezw. mit 2 Momenten verschiedenen Drehsinnes bestimmt. $M = \frac{1}{2} \cdot (M' + M'')$.

Belastung $M_1 = 1$ (oberer Knoten a) (-)

Bestimmung aus Belastung der Knoten 1 und 2

$M_3 = - 0{,}208 + 0{,}0595 = - 0{,}1485$ mt;

$M_4 = + 0{,}208 + 0{,}0595 = + 0{,}2675$ mt;

$M_2 = + 0{,}292 - 0{,}239 = + 0{,}053$ mt;

$M_1 = - 0{,}292 - 0{,}239 = - 0{,}531$ mt (Pf)

bezw. $= + 0{,}208 + 0{,}261 = + 0{,}469$ mt (G)

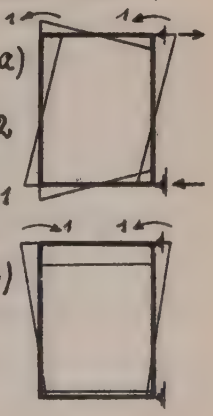


Fig. 31

Belastung $M_4 = 1$ (unterer Knoten a) (+)

Bestimmung aus Belastung der Knoten 3 und 4

$M_2 = + 0{,}208 - 0{,}0745 = + 0{,}1335$ mt;

$M_1 = - 0{,}208 - 0{,}0745 = - 0{,}2825$ mt;

$M_3 = - 0{,}292 + 0{,}269 = - 0{,}023$ mt;

$M_4 = + 0{,}292 + 0{,}269 = + 0{,}561$ mt (Pf);

bezw. $= - 0{,}208 - 0{,}231 = - 0{,}439$ mt (G)

Rahmen 2:

$l'' = 4{,}0$; $l' = 3{,}0$; $h'_{14} = h'_{23} = h' = 10$

$2 \cdot h' + 3 \cdot l'' = 32{,}0$; $2 \cdot h' + 3 \cdot l' = 29{,}0$;

$3 \cdot h' + l' = 34{,}0$; $3 \cdot h' + l'' = 33{,}0$

$k = 60{,}0 + 7{,}0 = 67{,}0$; $i = 100{,}0 + 140{,}0 + 36{,}0 = 276{,}0$

$+ \frac{3 \cdot h'}{k} = + 0{,}448$; $- 1 + 0{,}448 = - 0{,}552$;

$+ \frac{l' \cdot h'}{i} = + 0{,}109$; $- \frac{l' \cdot (2 \cdot h' + 3 \cdot l'')}{i} = 0{,}348$;

$1 - 0{,}348 = + 0{,}652$;

$+ \frac{l'' \cdot h'}{i} = + 0{,}145$; $- \frac{l'' \cdot (2 \cdot h' + 3 \cdot l')}{i} = 0{,}420$;

$1 - 0{,}420 = + 0{,}580$;

Belastung $M_1 = 1$ (oberer Knoten a oder b) (-)

$M_3 = - 0{,}224 + 0{,}0545 = - 0{,}1695$ mt;

$M_4 = + 0{,}224 + 0{,}0545 = + 0{,}2785$ mt;

$M_2 = + 0{,}276 - 0{,}174 = + 0{,}102$ mt;

$M_1 = - 0{,}276 - 0{,}174 = - 0{,}450$ mt (Pf)

bezw. $= + 0{,}224 + 0{,}326 = + 0{,}550$ mt (G)

Belastung $M_4 = 1$ (unterer Knoten a oder b) (+)

$M_2 = + 0{,}224 - 0{,}0725 = + 0{,}1515$ mt;

$M_1 = - 0{,}224 - 0{,}0725 = - 0{,}2965$ mt;

$M_3 = - 0{,}276 + 0{,}210 = - 0{,}066$ mt;

$M_4 = + 0{,}276 + 0{,}210 = + 0{,}486$ mt (Pf)

bezw. $- 0{,}224 - 0{,}290 = - 0{,}514$ mt (G)

Rahmen 3: wie Rahmen 1.

Die äußere Belastung P erzeugt Momente $M'_{(o)} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot l$

Rahmen 1:

$$M_{1(o)} = - M_{2(o)} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}857 \cdot 4{,}0 \cdot \frac{22}{43{,}2} = 2{,}91 \text{ mt};$$

$$M_{3(o)} = - M_{4(o)} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}857 \cdot 4{,}0 \cdot \frac{21{,}2}{43{,}2} = 2{,}80 \text{ mt};$$

Rahmen 2:

$$M_{1(o)} = - M_{2(o)} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}857 \cdot 6{,}0 \cdot \frac{34}{67} = 4{,}35 \text{ mt};$$

$$M_{3(o)} = - M_{4(o)} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}857 \cdot 6{,}0 \cdot \frac{33}{67} = 4{,}22 \text{ mt};$$

Rahmen 3:

$$M_{1(o)} = - M_{2(o)} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}143 \cdot 4{,}0 \cdot \frac{22{,}0}{43{,}2} = 7{,}28 \text{ mt};$$

$$M_{3(o)} = - M_{4(o)} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}143 \cdot 4{,}0 \cdot \frac{21{,}2}{43{,}2} = 7{,}00 \text{ mt}$$

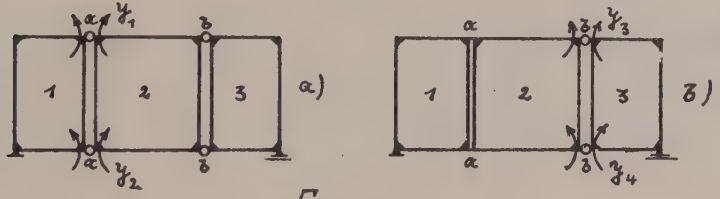


Fig. 32

Zunächst werden die Knotenmomente $Y^{o}_{a} = Y_1$ und $Y^{u}_{a} = Y_2$ für Belastung der Rahmen 1 und 2 infolge P und durch Knotenmomente $Y^{o}_{b} = Y_3 = 1$ (−) und $Y^{u}_{b} = Y_4 = 1$ (+). Die Beiwerte der Gleichungen zu ihrer Bestimmung sind folgende

$a_1 = - 6{,}0 \cdot (- 1{,}062 + 0{,}2675) - 10{,}0 \cdot (-0{,}9 + 0{,}2785)$

$= + 4{,}767 + 6{,}215 = + 10{,}982$

$a_2 = + 6{,}0 \cdot (+ 1{,}122 - 0{,}2825) + 10{,}0 \cdot (+ 0{,}972 - 0{,}2965)$

$= + 5,037 + 6,755 = 11,792$

$b = - 6,0 \cdot (+ 0,561 - 0,565) - 10,0 \cdot (+ 0,486 - 0,593)$

$= + 0,024 + 1,07 = + 1,094$

$c_1 = - 6,0 \cdot 3,02 - 10,0 \cdot (- 4,48) = - 18,12 + 44,80 = +$

$c_2 = + 6,0 \cdot (- 2,69) + 10,0 \cdot 4,09 = - 16,14 + 40,90 = +$

Diese Werte c sind für die Belastung P in den Glei=
chungen:

$10,982 \cdot Y_1 + 1,094 \cdot Y_2 = - 26,68$

$1,094 \cdot Y_1 + 11,792 \cdot Y_2 = - 24,76$

$Y_1 = - 2,24$ mt; $Y_2 = - 1,89$ mt

Belastung $Y_3 = 1$ (-)

$c_1 = - 10,0 \cdot (+ 0,204 - 0,1695) = - 0,345$

$c_2 = + 10,0 \cdot (- 0,339 + 0,102) = - 2,37$

$10,982 \cdot Y_1 + 1,094 \cdot Y_2 = + 0,345$

$1,094 \cdot Y_1 + 11,792 \cdot Y_2 = + 2,37$

$Y_1 = + 0,0115$; $Y_2 = + 0,20$

Belastung $Y_4 = 1$ (+)

$c_1 = - 10,0 \cdot (+ 0,303 - 0,066) = - 2,37$

$c_2 = + 10,0 \cdot (-0,132 + 0,1515) = + 0,195$

$Y_1 = + 0,22$; $Y_2 = - 0,037$

Nunmehr sind in dem in Fig. 32b dargestellten System als
Unbekannte die Knotenmomente Y_b^o und Y_b^u oder Y_3 und Y_4 zu
ermitteln. Da für den linken Teil als statisch bestimmte
Grundsystem der anteilige Stab 1–4 des Doppelstabes b–b
anzusehen ist, sind zunächst nur für diesen Stab die
Momente zu bestimmen. Sie sind in den Tabellen auf S. 59
zusammengestellt, und mit ihnen ergeben sich die Bei=
werte der Gleichungen zur Bestimmung von Y_3 und Y_4 :

$a_3 = - 10,0 \cdot (-0,837 + 0,2633) - 6,0 \cdot (- 0,7945) =$

$= + 5,737 + 4,767 = + 10,504$

$a_4 = + 10,0 \cdot (+ 0,9022 - 0,2797) + 6,0 \cdot 0,8395 =$

$+ 6,225 + 5,037 = + 11,262$

$b = - 10,0 \cdot (- 0,5594 + 0,4511) + 6,0 \cdot 0,004 =$

$+ 1,083 + 0,024 = + 1,107$

$c_3 = - 10,0 \cdot (+ 7,712 - 3,695) - 6,0 \cdot 7,56 =$

$- 40,17 - 45,36 = - 85,53$

$c_4 = + 10,0 \cdot (- 7,39 + 3,856) + 6,0 \cdot (- 6,72) =$

$- 35,34 - 40,32 = - 75,66$

$10,504 \cdot Y_3 + 1,107 \cdot Y_4 = 85,53$

$1,107 \cdot Y_3 + 11,262 \cdot Y_4 = 75,66$

$Y_3 = + 7,5$ mt; $Y_4 = + 6,0$ mt.

Momente im Stab 1–4 des Doppelstabes b–b im Hauptsystem I (Fig. 31)

	$Y_3 = 1$ (-)			$Y_4 = 1$ (+)			M_o	
Knoten	2	3		2	3		2	3
$Y_1 \cdot M'$	+ 0,0012	- 0,0020	$Y_1 \cdot M'$	+ 0,0224	- 0,0373	$Y_1 \cdot M'$	- 0,228	+ 0,380
$Y_2 \cdot M'$	+ 0,0303	- 0,0132	$Y_2 \cdot M'$	- 0,0056	+ 0,0024	$Y_2 \cdot M'$	- 0,286	+ 0,125
$\sum Y \cdot M'$	+ 0,0315	- 0,0152	$\sum Y \cdot M'$	+ 0,0168	- 0,0349	$\sum Y \cdot M'$	- 0,514	+ 0,505
$\bar{M}'^{G}_{Pf}$	+ 0,5500 - 0,4500	+ 0,2785	$\bar{M}'^{G}_{Pf}$	- 0,2965	- 0,5140 + 0,4860	$\bar{M}'^{G}_{o\,Pf}$	+ 4,370	- 4,200
$M'^{G}_{b\,Pf}$	+ 0,5815 - 0,4185	+ 0,2633	$M'^{G}_{b\,Pf}$	- 0,2797	- 0,5489 + 0,4511	$M'^{G}_{b\,Pf}$	+ 3,856	- 3,695

Momente im Pfostenträger.

Rahmen	1				2			
Knoten	2	3	4	1	1 (2)	4 (3)	3 (4)	2 (1)
$Y^o_\alpha M'^{G}_{Pf}$	- 0,044	+ 0,123	- 0,222	- 0,389 + 0,441	- 0,456 + 0,374	- 0,231	+ 0,140	- 0,084
$Y^{\infty}_\alpha M'^{G}_{Pf}$	- 0,081	+ 0,014	+ 0,268 - 0,342	+ 0,172	+ 0,181	+ 0,314 - 0,296	+ 0,041	- 0,092
$\sum Y_\alpha M'^{G}_{Pf}$	- 0,125	+ 0,137	+ 0,046 - 0,564	- 0,217 + 0,613	- 0,275 + 0,555	+ 0,083 - 0,527	+ 0,181	- 0,176
M_o	- 2,910	+ 2,800	- 2,800	+ 2,910				
M^{G}_{Pf}	- 3,035	+ 2,937	- 2,754 - 3,364	+ 2,693 + 3,523	$Y^o_\alpha = -2,24 + (7,5 \cdot 0,0115 + 6,0 \cdot 0,22)$ $= -2,24 + 1,41 = -0,83$ mt			

Rahmen	2				3			
Knoten	(1) 2	(4) 3	(3) 4	(2) 1	1	4	3	2
$Y_b^o M^{\hat{G}}_{Pf}$	+0,765	−1,270	+2,090	+4,13 −3,37	$Y_\alpha^u = -1,89+(7,5\cdot0,2-6,0\cdot0,037)$ $= -1,89+1,28 = -0,61\,mt$			
$Y_b^u M'^{G}_{Pf}$	+0,909	−0,396	−3,080 +2,920	−1,77				
$\Sigma Y_b M'^{G}_{Pf}$	+1,674	−1,666	−0,990 +5,010	+2,36 −5,14				
$\Sigma Y_\alpha M'^{G}_{Pf}$	−0,275 +0,555	+0,083 −0,527	+0,182	−0,176				
$Y_b^o M'^{G}_{Pf}$					+3,52 −3,98	+2,01	−1,112	+0,398
$Y_b^u M'^{G}_{Pf}$					−1,69	−2,64 +3,36	−0,138	+0,802
$\Sigma Y_b M'^{G}_{Pf}$	+1,674	−1,666	−0,990 +5,010	+2,360 −5,140	+1,83 −5,67	−0,63 +5,37	−1,250	+1,200
$\Sigma Y M'^{G}_{Pf}$	+1,399 +2,229	−1,583 −2,193	−0,808 +5,192	+2,184 −5,316				
M_o	−4,350	+4,220	−4,220	+4,350	+7,28	−7,00	+7,00	−7,28
M^{G}_{Pf}	−2,951 −2,121	+2,637 +2,027	−5,028 −0,972	+6,534 −0,966	+9,19 +1,61	−7,63 −1,63	+5,75	−6,08

Pfosten-Momente:
$M_\alpha^o = -(3,523+2,121) = -5,644\ mt$
$M_\alpha^u = +(3,364+2,027) = +5,391\ mt$
$M_b^o = +(1,610+0,966) = +2,576\ mt$
$M_b^u = -(1,630+0,972) = -2,602\ mt$

Einflußlinien des Pfostenträgers.

Im folgenden Abschnitt werden die Einflußlinien für den Pfostenträger mit parallelen, gleichen Gurten behandelt. Eine Übertragung auf den Träger mit verschiedenen Gurten ist damit ebenfalls gegeben. Die Einflußlinien der Momente bei Belastung der Knoten mit Einzellasten P setzen sich zusammen aus den Einflußlinien der M_o - Momente und der M' - Momente infolge der Knoten-

momente Y'_p und Y'_q für den Einzelrahmen n. Die Einflußlinien der M_o -Momente entsprechen denjenigen der Querkräfte eines einfachen Balkens mit Querträgern. Der Multiplikator ist dabei für Einzelrahmen mit ungleichen Pfosten $\mu_1 = \frac{3 \cdot l' + h'_{14}}{k} \cdot \frac{l}{2}$ bezw. $\mu_2 = \frac{3 \cdot l' + h'_{23}}{k} \cdot \frac{l}{2}$

und mit gleichen Pfosten $\mu = \frac{3 \cdot l' + h'}{k} \cdot \frac{l}{2}$

Die Ordinaten der Einflußlinien der Knotenmomente ergeben sich aus den Belastungen der einzelnen Knoten mit P = 1. Die hierfür zunächst ermittelten Einflußlinien für M'_p , M'_q usw. sind nur noch mit den Werten $\nu_1 = \pm \frac{h'_{14}}{k}$ bezw. $\nu_2 = \pm \frac{h'_{23}}{k}$ zu multiplizieren. Im Felde n ist z.B. das rechte Gurtmoment zusammen zu setzen aus der Q_n -Linie mit $\mu_1 = + \frac{3 \cdot l' + h'_{14}}{k} \cdot \frac{l}{2}$, der M'_p -Linie mit $\nu_1 \pm \frac{h'_{14}}{k}$ und der M'_q -Linie mit $\nu_2 = \pm \frac{h'_{23}}{k}$. Da die Beiwerte der Elastizitätsgleichungen a und b die gleichen bleiben, während im Belastungswert c nur Q sich ändert, ist die Rechenarbeit schnell durchzuführen.

Die Einflußlinie der Pfostenmomente M_{p-p} setzt sich zusammen aus den Einflußlinien für $M'_{p(n)}$ und $M'_{p(n-1)}$. Die Normalkraft im Knoten q des Doppelstabes ist $Q_{p(n)} \frac{l_n}{h} + \frac{2 \cdot Y'_q}{h}$ und im Gurtstab zwischen den Knoten

$$O_n = + U_n = - O_{n-1} \text{ bezw.} + U_{n-1} \pm \frac{2 \cdot M'_{p-p}}{h} .$$

An dem auf S.50 durchgeführten Beispiel möge die Ermittlung einiger Einflußlinien gezeigt werden. Zunächst sind in der Tabelle auf S.62 die Ordinaten der

M' -Linien zusammengestellt worden. Mit ihnen ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Bestimmung von Y' und damit auch die Ordinaten der Knotenmomente selbst.

		$J_c = 0{,}25$							
Rahmen		1		2		3		4	
Pfosten			a		b		c		
$Y'=1$	$v=M'$	$\pm 0{,}285$	$\pm 0{,}286$	$\pm 0{,}333$		$\pm 0{,}333$		$\pm 0{,}286$	$\pm 0{,}286$
	$=1=M'$		$\mp 0{,}714$	$\mp 0{,}667$		$\mp 0{,}667$		$\mp 0{,}714$	
S'			3,0	6,0	6,0	6,0	6,0	3,0	
α			2,14 4,00 + 6,14		4,00 4,00 + 8,00		2,14 4,00 + 6,14		
β			- 2,0		- 2,0		- 2,0		
μ_1 u. μ_2		1,145	0,855	1,50	1,50	1,50	1,50	0,855	1,145
$P_\alpha=1$	Q		+0,8		-0,2		-0,2		-0,2
	M_o	$\mp 0{,}916$	$\pm 0{,}684$	$\pm 0{,}30$	$\mp 0{,}30$	$\pm 0{,}30$	$\mp 0{,}30$	$\pm 0{,}171$	$\mp 0{,}229$
c_α			- 2,052 - 1,800 - 3,852		0		+ 1,800 - 0,513 + 1,287		
$P_\beta=1$	Q		+0,5		+0,5		-0,5		-0,5
	M_o	$\mp 0{,}572$	$\pm 0{,}428$	$\mp 0{,}75$	$\pm 0{,}75$	$\pm 0{,}75$	$\mp 0{,}75$	$\pm 0{,}428$	$\mp 0{,}572$
c_β			-1,284 +4,500 +3,216		-4,50 -4,50 -9,00		-1,284 +4,500 +3,216		

Belastung $P_\alpha = 1$: (Vergl. S. 51)

$$6{,}14 \cdot Y'_a - 2{,}0 \cdot Y'_b = + 3{,}855$$

$$-2{,}0 \cdot Y'_a + 8{,}0 \cdot Y'_b - 2{,}0 \cdot Y'_c = 0$$

$$-2{,}0 \cdot Y'_b + 6{,}14 \cdot Y'_c = -1{,}286$$

$$Y'_a = + 0{,}669; \quad Y'_b = + 0{,}125; \quad Y'_c = - 0{,}168$$

Belastung $P_b = 1$:

$$Y'_c = Y'_a \quad ; \quad \begin{aligned} 6{,}14 \cdot Y'_a - 2{,}0 \cdot Y'_b &= -3{,}216 \\ 4{,}0 \cdot Y'_a + 8{,}0 \cdot Y'_b &= +9{,}0 \end{aligned}$$

$$Y'_a = -0{,}188 \text{ mt}; \quad Y'_b = +1{,}03 \text{ mt}.$$

Die nach diesen Tabellenwerten mit obigen Gleichungen errechneten Y' und die Tabellenwerte selbst sind weiter zur Ermittlung der in Tabelle S.64 zusammengestellten Ordinaten der Einflußlinien benutzt.

Bei Belastung der Gurtstäbe zwischen den Knoten wird die Einflußlinie statt einer geraden Linie zwischen den einzelnen Knoten eine Kurve bilden. Diese ist zunächst durch die Knoten-Ordinaten bestimmt. Die Erhöhung und Verminderung der Ordinaten zwischen den Knoten gegenüber der Geraden werden in gleicher Weise ermittelt aus den $M_{(o)}$-Momenten und den Knotenmomenten, die infolge dieses Lastangriffes zusätzlich entstehen. Wie bereits früher bei Belastung der Gurte des Pfostenträgers gezeigt wurde, ist die Belastung eines Gurtes in 2 symmetrische Belastungsfälle beider Gurte zu zerlegen. Die zusätzlichen M_o-Momente infolge der Belastung $\frac{1}{2} \cdot P$ bezw. $\frac{1}{2} \cdot P$ der Gurte, einmal gleichgerichtet und dann entgegengesetzt gerichtet angenommen, treten dabei nur in dem Einzelrahmen, dem die belasteten Gurte angehören, auf. Die zusätzlichen Knotenmomente M' und M" sind besonders zu ermitteln und in gleicher Weise zur Bestimmung der Änderungen der Ordinaten der Einflußlinien für Knotenbelastung zu verwenden.

Ordinaten von Einflußlinien für den Pfostenträger

(M_m^l bedeutet linksseitiges und M_m^r rechtsseitiges Moment im Einzelrahmen n.)

Knoten	a	b	c
Y'_a - Linie	+ 0,669	− 0,188	− 0,168
Y'_b - "	+ 0,125	+ 1,030	+ 0,125
Y'_c - "	− 0,168	− 0,188	+ 0,669
$M^l_{1(0)}$ - Linie	∓ 0,916	∓ 0,572	∓ 0,229
$\pm 0{,}286 \cdot Y'_a$	± 0,191	∓ 0,054	∓ 0,048
M^l_1 - Linie	∓ 0,725	∓ 0,626	∓ 0,277
$M^r_{1(0)}$ - Linie	± 0,684	± 0,428	± 0,171
$\pm 0{,}286 \cdot Y'_a$	± 0,191	∓ 0,054	∓ 0,048
M^r_1 - Linie	± 0,875	± 0,374	± 0,123
$M^l_{2(0)}$ - Linie	± 0,300	∓ 0,750	∓ 0,300
$\pm 0{,}333 \cdot Y'_a$	± 0,223	∓ 0,063	∓ 0,056
$\pm 0{,}333 \cdot Y'_b$	± 0,042	± 0,344	± 0,042
M^l_2 - Linie	± 0,565	∓ 0,469	∓ 0,314
M_{a-a} - Linie	∓ 0,310	∓ 0,843	∓ 0,437
$M^r_{2(0)}$ - Linie	∓ 0,300	± 0,750	± 0,300
$\pm 0{,}333 \cdot Y'_a$	± 0,223	∓ 0,063	∓ 0,056
$\pm 0{,}333 \cdot Y'_b$	± 0,042	± 0,344	± 0,042
M^r_2 - Linie	∓ 0,035	± 1,031	± 0,286
M^l_3 - Linie	± 0,286	± 1,031	∓ 0,035
M_{b-b} - Linie	± 0,320	0	∓ 0,320
O_1 u. U_1	∓ 0,242	∓ 0,209	∓ 0,092
$\frac{2}{h} \cdot M_{a-a}$	∓ 0,103	∓ 0,281	∓ 0,146
O_2 u. U_2	∓ 0,345	∓ 0,490	∓ 0,238
$\frac{2}{h} \cdot M_{b-b}$	± 0,107	0	∓ 0,107
O_3 u. U_3	∓ 0,238	∓ 0,490	∓ 0,345

Einflußlinien für den Obergurt:

Momente: 5 cm = 1 mt
Gurtkräfte: 10 cm = 1 t

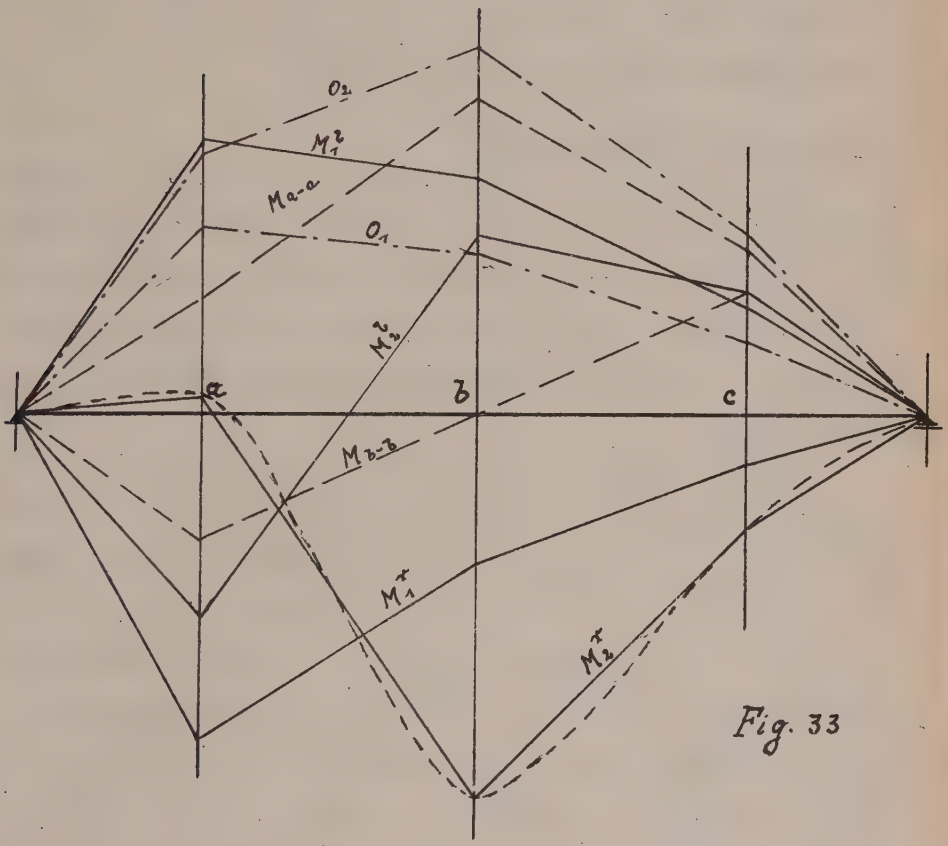


Fig. 33

Bem.
Die Einflußlinie für Belastung des Gurtes zwischen den Knoten ist bei der M_2^r -Linie gestrichelt angedeutet.

Für den Träger mit ungleichen und gebrochenen Gurten lassen sich die Einflußlinien in gleicher Weise ermitteln. Infolge der verschiedenen Knotenmomente im Ober- und Untergurt wird die Rechenarbeit allerdings erheblich umfangreicher.

In den Gurten entstehen die größten Momente und Gurtkräfte nicht immer bei der gleichen Laststellung, weshalb es für die Ermittlung der größten Spannungen notwendig ist, die durch F dividierten Gurtkraftlinien mit den durch J dividierten Gurtmomenten-Linien zu Gurtspannungslinien zusammen zu setzen.

Einfluß der Normalkräfte.

Bei dem Pfostenträger ist mit Rücksicht auf die großen Gurtkräfte der Einfluß der Normalkräfte nennenswert, und es wird sich daher bei diesem Tragwerk nicht umgehen lassen, bei der Bestimmung der statisch unbestimmten Größen die Längenänderung der Gurtstäbe zu berücksichtigen.

Auf Seite 30 ist für den Rechteckrahmen der Einfluß der Normalkräfte bereits untersucht und die für die Formeln sich ergebendeÄnderung festgestellt worden.

Die unbestimmten Knotenmomente des statisch unbestimmten Hauptsystems erzeugen in dem statisch bestimmten Grundsystem, welches durch die Doppelstäbe gebildet wird, keine Normalkräfte. Die Normalkräfte in den Gurten spielen daher für den weiteren Rechnungsgang nur insofern eine Rolle, als dieser mit den Momenten durchgeführt wird die sich unter Berücksichtigung der genannten Normalkräfte im Einzelrahmen ergeben haben. Verschiedene Temperaturänderungen in den Gurten sind in derselben Weise zu behandeln.

6. Der mehrstielige Rahmen.

Der durchgehende Rahmen mit mehreren Stielen, sei es mit Fußgelenken oder mit eingespannten Stielfüßen, kann nach diesem Rechnungsverfahren ebenfalls vorteilhaft untersucht werden.

Das statisch unbestimmte Hauptsystem besteht aus einer Reihe zweistieliger Rahmen mit Fußgelenken oder eingespannten Stielfüßen entsprechend dem zu untersuchenden System. Das statisch bestimmte Grundsystem wird gebildet bei eingespannten Stielen durch die frei eingespannten Teilstäbe des Doppelstabes. Bei Rahmen mit Fußgelenken ist das statisch bestimmte Grundsystem weniger einfach. Es besteht zur Bestimmung von X und Y aus einem Teilstab und dem Gurt; lediglich bei Belastung durch die Knotenmomente und durch Gurtlasten genügt der Gurtstab allein.

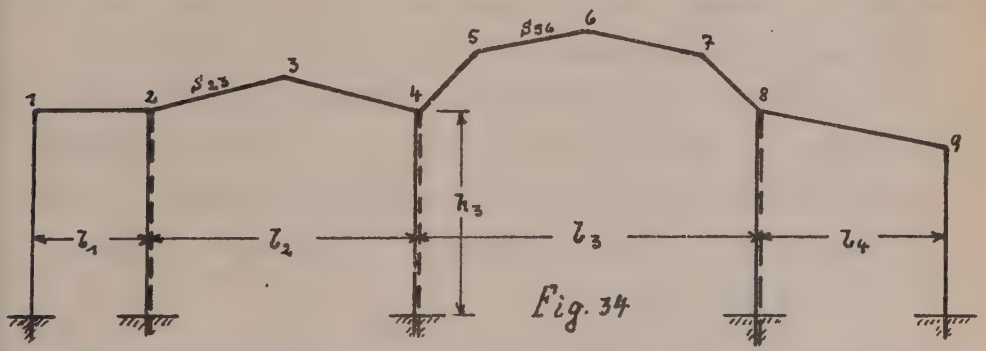


Fig. 34

Stiele oder Pfosten werden, wie gesagt, wieder als Doppelstäbe angenommen, sodaß als statisch unbestimmte Größen die Horizontalkräfte X und die Knotenmomente Y vorhanden sind. Bei n Feldern sind daher allgemein

$(n-1)\cdot 2$ Unbekannte zu berechnen, wofür ebenso viele Gleichungen mit 6 bezw. 4 Unbekannten aufzustellen sind. Falls der mehrstielige Rahmen zu einer Vertikalachse symmetrisch ist, verringert sich die Zahl der Unbekannten und der Gleichungen bei ungerader Feldzahl auf $n-1$ und bei gerader Feldzahl auf n.

Die Zahl der Unbekannten und der Gleichungen läßt sich vermindern, indem man X und Y nacheinander ermittelt. Zunächst werden die Horizontalkräfte X für die äußere Belastung und nacheinander für die Belastungen durch Knotenmomente $Y = 1$ errechnet. Für diese verschiedenen Belastungszustände werden dann die Momente unter Berücksichtigung von X in den einfachen Rahmen ermittelt. Die Momente werden $M_{n(o)} = \pm \bar{M}_{n(o)} \pm X_{n(o)} \bar{M}_x$ und $M_{n(y)} = \pm \bar{M}_{n(y)} \pm X_{n(y)} \bar{M}_x$.

Das statisch unbestimmte Hauptsystem besteht danach aus Einzelrahmen, die am oberen Ende des Doppelstabes gelenkig verbunden sind. Die unbekannten Knotenmomente Y werden unter Verwendung des gleichen statisch bestimmten Grundsystems und unter Berücksichtigung der Momente in den gelenkig verbundenen Einzelrahmen bestimmt. Die endgültigen Momente setzen sich zusammen aus den Momenten $M_{(o)}$ in den gelenkig verbundenen Rahmen und den durch die Knotenmomente Y erzeugten Momente $Y \cdot M'$. Es ist somit

$$M = \pm M_{(o)} \pm Y \cdot M'$$

Die Momente in den Einzelrahmen können aus Formelnsammlungen der Literatur entnommen werden. Die Beiwerte der Gleichungen a, b, und c werden in gleicher Weise bestimmt, wie es bei der Berechnung des einfachen

Stockwerkrahmens und des Pfostenträgers geschieht. Falls ein Mittelstiel über den Gurt des einen Feldes hinausragt, wird zweckmäßig der Teil, welcher über das Gelenk des Doppelstabes hinaus sich erstreckt, zum Gurt des höheren einfachen Rahmens gerechnet. Die Bemessung von mehrstieligen Rahmen beliebiger Form ist somit nach diesem Verfahren leicht und übersichtlich durch= zuführen.

7. Der mehrfache Stockwerkrahmen.

Die Pfosten der Mittelfelder des unten abgebildeten mehrfachen Stockwerkrahmens sind so geteilt, daß in den mittleren Einzelrahmen gleiche Trägheitsmomente der Pfosten vorhanden sind. Dasselbe trifft zu für die Gurtstäbe, wobei dem unteren, zweistieligen Rahmen das restliche Trägheitsmoment des unteren Gurtes zugeschrieben wird. Soweit es möglich ist, wird man auch bei den Pfosten die Teilung so vornehmen, daß im Endrahmen ebenfalls gleiche Pfosten beiderseits vorhanden sind. Das setzt natürlich voraus, daß der Querschnitt des Endpfostens kleiner ist als derjenige der Mittelpfosten. Dann ist bei ungerader Feldzahl die Teilung der Doppelstäbe immer in der Weise möglich, daß in sämtlichen Einzelrahmen gleiche Pfosten vorhanden sind.

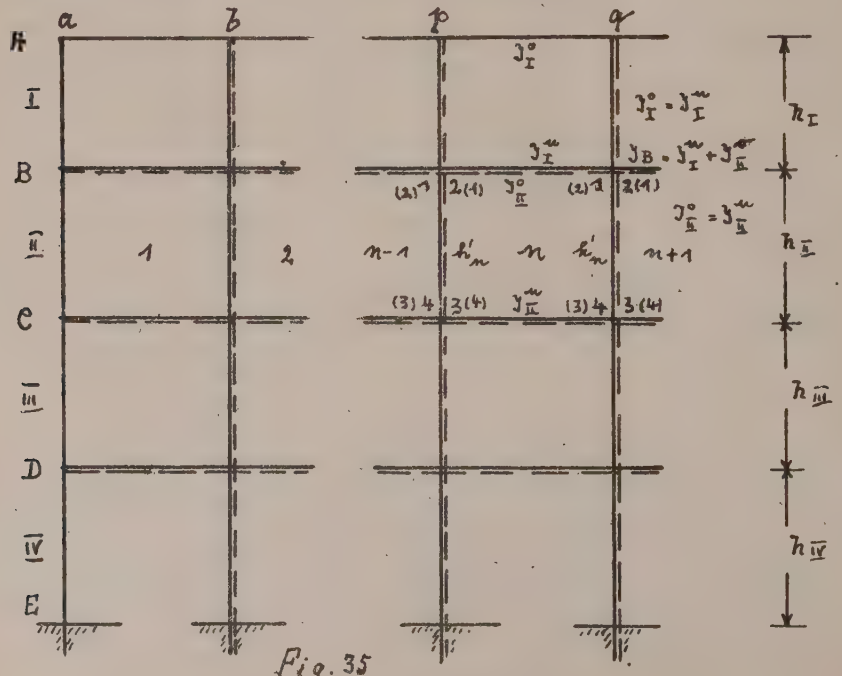


Fig. 35

Die Einzelrahmen in den Geschossen werden mit 1, 2, 3 ... n und die Geschosse mit I, II, III usw. bezeichnet. Weiter werden die Pfosten durch Buchstaben a, b, c, ... r und die Gurte durch A, B, C ... unterschieden. Beim Stockwerkrahmen sind der Reihe nach zu untersuchen die Einzelrahmen, die mehrteiligen Geschoßrahmen und schließlich die Einwirkung der Kräfte und Momente der einzelnen Geschoßrahmen aufeinander. (Vergl. Fig. 36-38).

Die Momente, welche infolge der Knotenmomente Z in den Gurten zwischen den mehrteiligen Geschoßrahmen auftreten, werden aus den beiden symmetrischen

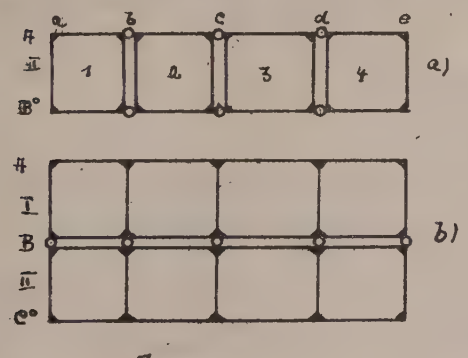


Fig. 36

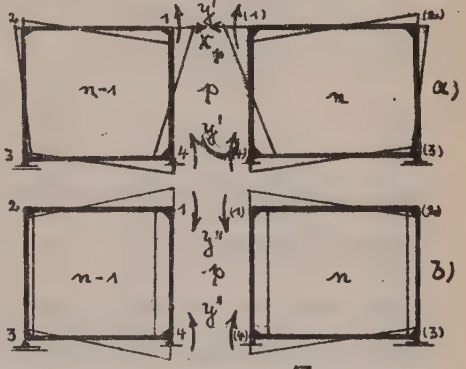


Fig. 37

Belastungsfällen zweier Momente gleichen und verschiedenen Drehsinnes im Ober- und Untergurt des Geschoßrahmens bestimmt. Fig. 37-38 Durch Zusammensetzung dieser beiden Belastungsfälle ergeben sich die Momente infolge 1 Knotenmomentes im Ober- oder Untergurt.

Bevor der Einfluß der äußeren Belastung des Geschoßrahmens näher untersucht wird, möge der Rechnungsgang für die Ermittlung der Knotenmomente zwischen den Einzelrahmen und derjenigen zwischen dem mehrteiligen

Geschoßrahmen durchgeführt werden. Die Formeln für die entsprechend gestützten Einzelrahmen sind auf S.27-28 zu ersehen.

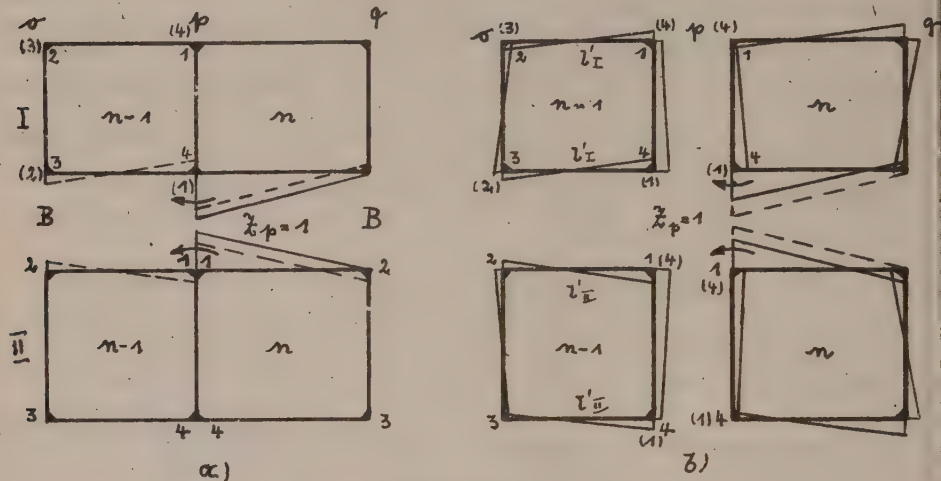


Fig. 38

Horizontalkräfte X und Knotenmomente im mehrteiligen Geschoßrahmen bei Belastung durch Knotenmomente.

Die Knotenmomente Y' erzeugen Horizontalkräfte X zwische den Einzelrahmen, während für die Knotenmomente Y" die Horizontalkräfte X = 0 sind.

Nach den Formeln für Einzelrahmen mit Stützung am Untergurt S.28 ist infolge Belastung durch eine Horizontalkraft X = 1 im Knoten des Obergurtes im Endrahmen mit verschiedenen Pfostenquerschnitten

im Pfosten a-a: $\bar{M}_x = \pm \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{3 \cdot l'_1 + h'_{1r}}{k_1}$

im Pfosten b-b: $\bar{M}_x = \mp \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{3 \cdot l'_1 + h'_{1l}}{k_1}$

und im Mittelrahmen mit gleichen Pfosten $\bar{M}_x = \pm \frac{1}{4} \cdot h$

Die Belastung durch Knotenmomente Y' ergibt im End=

rahmen

$$\bar{M}_{(y')} = \pm \frac{3 \cdot l_1'}{k_1'} \quad \text{bezw.} \quad \mp 1 \pm \frac{3 \cdot l_1'}{k_1}$$

und im Mittelrahmen $\bar{M}_{(y')} = \pm \frac{3 \cdot l_n'}{k_n}$ bezw. $\mp 1 \pm \frac{3 \cdot l_n'}{k_n}$

Die Belastung durch Knotenmomente Y" ergibt im End= rahmen für die Pfosten

$$\bar{M}_{(y'')} = \frac{l_1' \cdot h_{1r}'}{i_1} \quad \text{bezw.} \quad \frac{l_1' \cdot (l_1' + 2 \cdot h_{1l}')}{i_1}$$

und im Mittelrahmen

$$\bar{M}_{(y'')} = \frac{l_n' \cdot h_n'}{i_n} \quad \text{bezw.} \quad \frac{l_n' \cdot (l_n' + 2 \cdot h_n')}{i_n}$$

Die Bestimmungsgleichungen für X bei Belastung durch Knotenmomente Y' = ∓ 1 lauten

$$a_{12} \cdot X_b - b_2 \cdot X_c = - c_{12}$$

$$- b_2 \cdot X_b + a_{23} \cdot X_c - b_3 \cdot X_d = + c_2$$

$$\text{usw.} \quad - b_{n-1} \cdot X_r + a_{(n-1)n} \cdot X_p - b_n \cdot X_q = 0$$

Die Indices der Beiwerte sind die Zahlen der zuge= hörigen Felder (Rahmen).

In den Gleichungen ist

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{bb} = \frac{h^2}{6}\left[\frac{1}{2k_1}\left(h_{1r}' \cdot (3 \cdot l_1' + h_{1l}') + l_1' \cdot (3 \cdot l_1' + 2 \cdot h_{1l}' - h_{1r}')\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \cdot (h_2' + l_2')\right] = \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot (a_1 + a_2) = \frac{1}{6} \cdot h^2 \, a_{12}$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{bc} = - \frac{1}{6} \cdot h^2 \frac{1}{4} \cdot (h_2' + l_2') = - \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot b_2$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{pp} = \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot (a_{n-1} + a_n) = \frac{1}{6} \cdot h^2 \, a_{(n-1)n} ;$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{pq} = - \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot b_n$$

infolge Belastung durch Knotenmomente $Y_1' = \pm 1$

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{b0} = + \frac{1}{6} \cdot h \cdot \left(\frac{l_1'}{k_1} \cdot (3 \cdot l_1' + 2 \cdot h_{1l}' - h_{1r}') + \frac{1}{2} \cdot l_2'\right)$$

$$= + \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot \left(\frac{l_1'}{h \cdot k_1} \cdot (3 \cdot l_1' + 2 \cdot h_{1l}' - h_{1r}') + \frac{l_2'}{2 \cdot h}\right)$$

$$= + \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot (c_1 + c_2) = + \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot c_{12}$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{cc} = -\frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot c_n \text{ und infolge } Y'_p = \mp 1$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{p\,o} = +\frac{1}{6} \cdot h \, \frac{1}{2} \cdot (l'_{n-1} + l'_n) = +\frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot \left(\frac{l'_{n-1}}{2 \cdot h} + \frac{l'_n}{2 \cdot h}\right)$$

$$= +\frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot c_{(n-1)n}$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{q\,o} = -\frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot c_n$$

Für $Y'_p = \mp 1$ werden alle Werte $c = 0$ bis auf $-c_{n-1}$, $+c_{(n-1)n}$ und $-c_n$. Die Momente in dem Einzelrahmen n werden somit

$$M_{(y')} = \bar{M}_{(y')} \pm (X_{p(y')} - X_{q(y')}) \frac{h}{4}$$

Da für Y" die Horizontalkraft X = 0 ist, wird

$$M_{(y'')} = \bar{M}_{(y'')}$$

Die äußeren Belastungen werden so angesetzt, daß durch Teilung Symmetrie erreicht wird. Als Knotenmoment zwischen den Einzelrahmen der Geschoßrahmen können daher für Ober- und Untergurt gleiche Knotenmomente Y' bei gleichen bezw. Y" bei verschiedenem Drehsinn eingeführt werden.

Zur Bestimmung der Knotenmomente Z, die zwischen den mehrteiligen Geschoßrahmen auftreten, denken wir uns wieder zunächst eine Belastung von Knotenmomenten gleicher und Knotenmonenten verschiedenen Drehsinnes in Ober- und Untergurt des Geschoßrahmens an den Knoten der Doppelstäbe wirksam. Diese mit M'_χ und M''_χ bezeichneten Momente belasten an jedem Doppelstab in den gelenkig verbundenen Einzelrahmen der Geschoßrahmen nur die Ecken von 1 der benachbarten Einzelrahmen, gleichgültig ob am Pfosten- oder Gurtstab.

Die durch M'_χ erzeugten Horizontalkräfte X werden in gleicher Weise ermittelt wie bei Belastung durch Knoten-

momente Y', wobei das Integral $E \cdot I_c \cdot \delta_o$ nur über 1 Rahmen sich erstreckt. Für M''_χ wird X wieder Null. Dann ist im Endrahmen

$$M_{(M'_\chi)} = \bar{M}_{(M'_\chi)} \pm (X_{\varphi(M'_\chi)} - X_{\varphi(M'_\chi)}) \cdot \bar{M}_\varkappa ,$$

wenn $\bar{M}_\varkappa$ das Moment für X = 1 ist. Im Mittelrahmen ist

$$\bar{M}_\varkappa = \frac{h}{4}$$

$$M_{(M''_\chi)} = \bar{M}_{(M''_\chi)}$$

Wir kommen jetzt zur Bestimmung der Knotenmomente Y' und Y" in den einzelnen Knoten der Doppelstäbe zwischen den Einzelrahmen der Geschoßrahmen infolge Belastung durch Eckmomente M'_χ und M''_χ.

Bei Belastung durch M'_χ sind die Bestimmungsgleichungen für Y' :

$$a'_{12} \cdot Y'_b + b'_2 \cdot Y'_c = - a'_{12}$$

$$+ b'_2 \cdot Y'_b + a'_{23} \cdot Y'_c + b'_3 \cdot Y'_d = - b'_2$$

$$\text{usw.} \quad + b'_{n-1} Y'_\sigma + a'_{(n-1)n} Y'_\rho + b'_n \cdot Y'_\varphi = 0$$

Es bedeutet:

$$E \cdot I_c \cdot \delta'_{bb} = \frac{1}{3} \cdot l'_1 \cdot \left[\left(+2 \cdot M'_{1(y')} - M'_{2(y')}\right) + l'_2 \cdot \left(+2 \cdot M'_{1(y')} - M'_{2(y')}\right) \right] = \frac{1}{3} \cdot (a'_1 + a'_2) = \frac{1}{3} \cdot a'_{12}$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta'_{bc} = \frac{1}{3} \cdot l'_2 \cdot \left(-2M'_{2(y')} + M'_{1(y')}\right) = \frac{1}{3} \cdot b'_2 \quad \text{usw.}$$

und bei Belastung durch $M'_\chi = \mp 1$ am Doppelstabe b–b z.B.

$$E \cdot I_c \cdot \delta'_{bo} = \frac{1}{3} \cdot c'_1 = \frac{1}{3} \cdot a'_1 \quad \text{bezw.} = \frac{1}{3} \cdot c'_2 = \frac{1}{3} \cdot a'_2$$

je nachdem $M'_2 = 1$ am Einzelrahmen 1 oder 2 angreifend angenommen ist.

$$E \cdot I_c \cdot \delta'_{co} = \frac{1}{3} \cdot c'_2 = \frac{1}{3} \cdot b'_2$$

Die übrigen Werte c sind für diese Belastung = Null.

Entsprechende Gleichungen sind für die übrigen Belastungen M'_χ aufzustellen.

Bei Belastung durch M''_χ sind die Bestimmungsgleichungen für Y'' :

$$a''_{12} \cdot Y''_b + b''_2 \cdot Y''_c = -a''_{12}$$

$$b''_2 \cdot Y''_b + a''_{23} \cdot Y''_c + b''_3 \cdot Y''_d = -b''_2$$

$$\text{usw. } b''_{n-1} \cdot Y''_\sigma + a''_{(n-1)n} \cdot Y''_\rho + b''_n \cdot Y''_\varphi = 0$$

Es bedeutet

$$E \cdot I_c \cdot \delta''_{bb} = + \frac{h'_{1r} \cdot l'_1}{i_1} \cdot (l'_1 + 2 \cdot h'_{1l}) + \frac{h'_2 \cdot l'_2}{i_2} \cdot (l'_2 + 2 \cdot h'_2) = a''_1 + a''_2 = a''_{12}$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta''_{bc} = + \frac{l'_2}{i_2} \cdot h'_2 = b''_2 \quad \text{usw.}$$

und für Belastung durch Eckmomente $M''_\chi = 1$ z.B.

$E \cdot I_c \cdot \delta''_{bo} = c''_1 = a''_1$ bezw. $= c''_2 = a''_2$, je nachdem $M''_\chi = 1$ am Einzelrahmen 1 oder 2 angreifend angenommen ist.

$E \cdot I_c \cdot \delta''_{co} = c''_2 = b''_2$; die übrigen c'' werden Null.

Die Momente im Rahmen n des mehrteiligen Geschoßrahmens sind nunmehr infolge Belastung durch M'_χ und M''_χ

$$M'_{(M'_\chi)} = \pm M_{(M'_\chi)} \pm Y'_\rho \cdot M'_\rho \pm Y'_\varphi \cdot M'_\varphi$$

$$M''_{(M''_\chi)} = M_{(M''_\chi)} + Y''_\rho \cdot M''_\rho + Y''_\varphi \; M''_\varphi$$

M'_ρ und M''_φ sind die Momente für $Y'_\rho = 1$ und $Y''_\rho = 1$.

Die Zusammensetzung der Momente, die infolge Belastung durch Eckmomente M'_χ und M''_χ auftreten, ergibt mit $M'''_\chi = \frac{1}{2} \cdot (M'_\chi + M''_\chi)$ die Momente, die im Geschoßrahmen infolge Belastung durch 1 Eckmoment im Ober- oder Untergurt entstehen.

Der Rechnungsgang ist also folgender:

1) Bestimmung der Momente $\bar{M}$ in den Einzelrahmen für

Belastung durch $X = 1$, $Y' = \mp 1$ $Y'' = 1$, $M'_\chi = \mp 1$ und $\bar{M}''_\chi = 1$.

2) Bestimmung der Horizontalkräfte X in den Obergurten der Geschoßrahmen für $Y' = \mp 1$, $M'_\chi = \mp 1$ sowie der sich ergebenden Momente $M_{(\,)} = \bar{M}_{(\,)} \pm X \cdot \bar{M}_x$ bezw. $M_{(\,)} = \bar{M}_{(\,)} \pm X \cdot \frac{h}{4}$ usw. im Einzelrahmen.

3) Bestimmung der Knotenmomente mit gleichem Drehsinn $Y' = \pm 1$ für Belastung durch Eckmomente $M'_\chi = \pm 1$ sowie der sich ergebenden Momente im Einzelrahmen $M'_{(M'_\chi)} = \pm M_{(M'_\chi)} \pm Y'_p \cdot M'_p \pm Y'_q \cdot M'_q$

4) Bestimmung der Knotenmomente mit entgegengesetztem Drehsinn $Y'' = 1$ für Belastung durch Eckmomente $M''_\chi = 1$ sowie der sich ergebenden Momente im Einzelrahmen $M''_{(M''_\chi)} = \pm M_{(M''_\chi)} \pm Y''_p \cdot M''_p \pm Y''_q \cdot M''_q$

5) Zusammensetzung der Belastungsfälle 3 und 4 zur Bestimmung der Momente $M'''_\chi = \frac{1}{2} \cdot (M'_\chi + M''_\chi)$ die infolge Belastung durch 1 Eckmoment $Z = 1$ entstehen.

II.) <u>Horizontalkräfte X und Knotenmomente im Geschoßrahmen bei äußerer Belastung.</u>

In gleicher Weise wie vor werden Kräfte und Momente für äußere Belastung ermittelt, wobei unsymmetrische Belastungen durch Aufteilung in 2 symmetrische Belastungsfälle den Knotenmomenten Y' und Y" angepaßt werden. Der Rechnungsgang ist wiederum folgender:

1) Momente $\bar{M}_o$ im Einzelrahmen
2) Horizontalkräfte X zwischen den Einzelrahmen mit $M_{x(o)}$
3) Knotenmomente Y' mit gleichem Drehsinn für gleichgerichtete Teilbelastung mit $M'_{(o)}$

4) Knotenmomente Y" mit verschiedenem Drehsinn für entgegengesetzte Teilbelastung mit $M''_{(o)}$

5) Zusammensetzung der Belastungsfälle 3 und 4 zur Bestimmung der Momente M'''_o

a) Horizontalkraft X.

Belastung durch Horizontalkraft H im Knoten des Außenpfostens:

Nach den Formeln sind im Einzelrahmen mit verschiedenen Pfosten die Momente:

Endrahmen) $\bar{M}_{2/o} = -\bar{M}_{3/o} = h \cdot H \cdot \frac{3 \cdot l'_1 + h'_{1r}}{2 \cdot k_1} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot H \cdot \alpha_r$

und $\bar{M}_{4/o} = -\bar{M}_{1/o} = h \cdot H \cdot \frac{3 \cdot l'_1 + h'_{1l}}{2 \cdot k_1} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot H \cdot \alpha_l$

In den Mittelrahmen mit gleichen Pfosten wird

$\bar{M}_o = \pm \frac{1}{4} \cdot h \cdot H$

Bei Angriff der Horizontalkraft H im Knoten des Außenpfostens werden nur im Endrahmen Momente $\bar{M}_o$ erzeugt. Es wird daher

$E \cdot I_c \cdot \delta_{3o} = -\frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot c_{12} - H \cdot \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot a_1$; $c_{12} = -H \cdot a_1$; die übrigen c werden Null.

Mit den bereits bekannten Werten a und b lauten die Gleichungen

$a_{12} \cdot X_b - b_2 \cdot X_c = -c_{12}$

$-b_2 \cdot X_b + a_{23} \cdot X_c - b_3 \cdot X_d = -c_2 = o$

usw. $-b_{n-1} \cdot X_p + a_{(n-1)n} \cdot X'_p - b_n \cdot X_q = -c_n = o$

Die Momente in den gelenkig verbundenen Einzelrahmen infolge äußerer Belastung mit Berücksichtigung der Horizontalkräfte X werden mit M_o bezeichnet.

Im Endrahmen ist $M_o = \pm (H - X_2) \cdot \frac{h}{2} \cdot \alpha_r$ bezw. $\cdot \alpha_l$ und in den Mittelrahmen $M_o = \pm (X_1 - X_2) \cdot \frac{h}{4}$

Belastung eines Gurtes mit verteilter Last p:

Zur Vereinfachung des Rechnungsganges wird die Belastung in 2 für den Rahmen symmetrische Belastungsfälle geteilt. Zunächst werden Ober- und Untergurt mit gleichgerichteter Last $\frac{1}{2}$ p belastet*). Ist der Obergurt mit p^r und der Untergurt mit p^u belastet, dann werden als Teillasten $\frac{1}{2} \cdot p = \frac{1}{2} \cdot (p^r + p^u)$ und $\frac{1}{2} \cdot p = \frac{1}{2} \cdot (p^r - p^u)$ eingeführt. Mit den früher ermittelten Formeln ergeben die beiden gleichgerichteten Belastungshälften im Endrahmen mit verschiedenen Pfosten die Horizontalkraft X. Die Belastungswerte der Gleichungen ergeben sich aus

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{bo} = \frac{1}{48} \cdot p \cdot l_1^3 \, h \frac{l'_1}{k_1} \cdot (h'_{1l} - h'_{1r}) = \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot c_{12} \; ;$$

$$c_{12} = \frac{1}{8} \cdot p \cdot \frac{l_1^2}{h} \cdot \frac{l'_1}{k_1} \cdot (h'_{1l} - h'_{1r})$$

Die Gleichungen für X sind dieselben wie zuvor. Die Werte c sind Null bis auf c_{12}. Bei Belastung der Mittelrahmen mit gleichen Pfosten werden alle Werte c = 0; eine Horizontalkraft X tritt nicht auf, $M_o = \bar{M}_o$. Bei Vollast aller Felder z.B. durch Eigengewicht wirkt die in den Endrahmen erzeugte Horizontalkraft nur als Längskraft.

Die beiden entgegengesetzten Belastungshälften geben für sämtliche Rahmen c = 0, d.h. X = 0 und $M_o = \bar{M}_o$.

Belastung eines Gurtes durch Einzellasten.

Die Berechnung wird wieder durch Einführung zweier Belastungsfälle mit den Belastungshälften durchgeführt.

*) und mit entgegengesetzter Last $\frac{1}{2}p$

Hier wird bei den gleichgerichteten Belastungshälften auch in den Mittelrahmen mit c die Horizontalkraft in Erscheinung treten, falls die Einzellasten nicht symmetrisch zur Rahmenachse wirken. Die entgegengesetzt gerichteten Belastungshälften geben wie oben c = 0, X = 0 und $M_o = \bar{M}_o$.

b) Knotenmomente.

Belastung durch Horizontalkräfte in den Knoten der Außenstiele und durch gleichgerichtete Belastungshälften der Feldlasten bezw. Gurtlasten ergeben Knotenmomente mit gleichem Drehsinn Y'

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{bo} = \frac{1}{3} \cdot (h'_1 \cdot M_{b(1)o} + h'_2 \cdot M_{b(2)o}) = \frac{1}{3} \cdot c'_{12}$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{po} = \frac{1}{3} \cdot (h'_{n-1} \cdot M_{p(n-1)o} + h'_n \cdot M_{p(n)o}) = \frac{1}{3} \cdot c'_{(n-1)n}$$

Die Momente in den Geschoßrahmen werden $M'_{(o)} = M_o + Y'_p \cdot M'_p + Y'_q \cdot M'_q$

Belastung durch entgegengesetzt gerichtete Belastungshälften der Gurte geben Knotenmomente mit verschiedenem Drehsinn Y".

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{bo} = h'_1 \cdot M_{b(1)o} + h'_2 \cdot M_{b(2)o} = c''_{12}$$

$$E \cdot I_c \cdot \delta_{po} = h'_{n-1} \cdot M_{p(n-1)o} + h'_n \cdot M_{p(n)o} = c''_{(n-1)n}$$

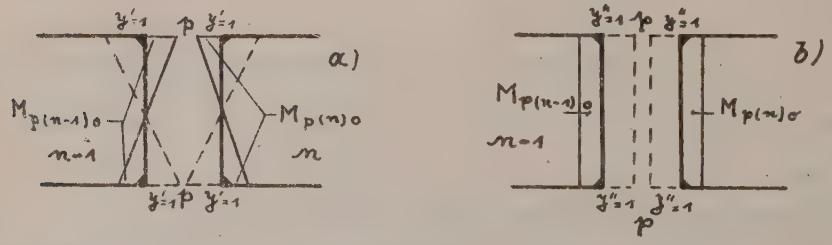


Fig. 39

Bei Belastung der Felder sind M'_o und M''_o zusammenzu= setzen zu den endgültigen Momenten in den mehrteiligen Geschoßrahmen

$$M'''_o = \frac{1}{2} \cdot (M'_o + M''_o)$$

III.) Knotenmomente Z zwischen den Geschoßrahmen.

Es lassen sich nun die Gleichungen zur Bestimmung von Z nach Fig.4o aufstellen. In diesen Gleichungen bedeutet:

$$E \cdot I_c \delta^{NN}_{pp} = \frac{1}{6} \cdot \left[l'_{\overline{X}} \cdot (2 \cdot M'''_1 + M'''_2) + l'_{\overline{XI}} \cdot (2M'''_1 + M'''_2) \right] = \frac{1}{6} \cdot a^{NN}_{pp}$$

$$E \cdot I_c \delta^{NN}_{pq} = \frac{1}{6} \cdot \left[l'_{\overline{X}} \cdot (2 \cdot M'''_2 + M'''_1) + l'_{\overline{XI}} \cdot (2M'''_2 + M'''_1) \right] = \frac{1}{6} \cdot a^{\overline{X}}_{pq}$$

$$E \cdot I_c \delta^{N\sigma}_{pp} = \frac{1}{6} \cdot \left[l'_{\overline{XI}} \cdot (2M'''_4 + M'''_3) \right] = \frac{1}{6} \cdot b^{\overline{XI}}_{pp}$$

$$E \cdot I_c \delta^{N\sigma}_{pq} = \frac{1}{6} \cdot \left[l'_{\overline{XI}} \cdot (2M'''_3 + M'''_4) \right] = \frac{1}{6} \cdot b^{\overline{XI}}_{pq}$$

$$E \cdot I_c \delta = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E \cdot I \cdot \delta^{N}_{p0} = \frac{1}{6} \cdot \left[l'_{\overline{X}} \cdot (2 \cdot M'''_{1(o)} + M'''_{2(o)}) + l'_{\overline{XI}} \cdot (2M'''_{1(o)} + M'''_{2(o)}) \right] = \frac{1}{6} \cdot c^{N}_{p}$$

Die Elastizitätsgleichung für das Moment Z im Knoten p im Gurt N zwischen den Geschoßrahmen (Stockwerken) X und XI hat z.B. die Form

$$a^{N}_{p\sigma} \cdot Z^{N}_{\sigma} + a^{N}_{pp} \cdot Z^{N}_{p} + a^{N}_{pq} \cdot Z^{N}_{q} + \Sigma\, b^{\overline{X}} \cdot Z^{M} + \Sigma\, b^{\overline{XI}} \cdot Z^{\sigma} = - c^{N}_{p}$$

Von diesen Gleichungen sind bei r Geschossen und n Feldern allgemein $(r-1)\cdot(n+1) = z$ erforderlich; die größte Zahl der in einer Gleichung vorkommenden Unbe= kannten beträgt dabei $3\cdot(n+1)$. Bei symmetrischen Stock= werkrahmen verringert sich die Zahl auf $z = (r-1)\cdot\frac{n+1}{2}$ Gleichungen mit einer Größtzahl an Unbekannten von $3\cdot\frac{n+1}{2}$. Bei gerader Feldzahl ist n+2 statt n+1 zu

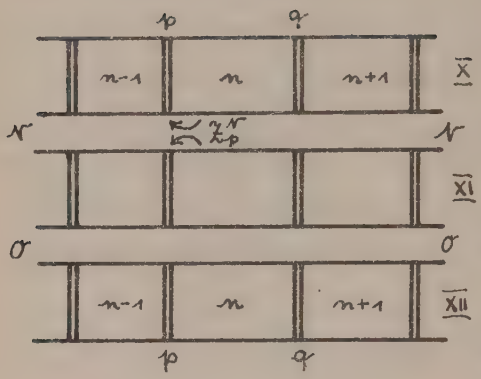


Fig. 40

setzen.

Günstiger wird die Bestim
mung der Knotenmomente Z,
wenn man nach dem Vorschl
ge im Abschnitt 1 die Mo=
mente der Reihe nach be=
rechnet. Zunächst werden
obersten Zwischengurt B a
Doppelstab die Momente Z^B
zwischen den beiden benac
barten Geschoßrahmen für
Belastung durch äußere
Kräfte und durch Knoten=
momente $Z^e = 1$ im folgenden Gurt C der Reihe nach bestim
Dann werden die Momente in den Teilstäben des Gurtes C
vom 2ten Geschoßrahmen ermittelt. Diese und die am Teil=
stabe C des 3ten Geschosses wirksamen Momente dienen nun
zur Berechnung der Beiwerte für die Gleichungen von Z^C
Als Belastungen kommen in Betracht die äußeren Kräfte un
die Knotenmomente $Z^D = 1$ im Gurt D. In dieser Weise ist
die Berechnung weiter durchzuführen zur Bestimmung der
endgültigen Knotenmomente Z, wie im Abschnitt 1 beschrie=
ben wurde.

Ist die Anzahl der Geschosse r und die der Felder n,
so sind für (r-2) Zwischengurte erforderlich (n+1) + 1
Gleichungsgruppen mit je (n+1) Gleichungen, und für
1 Gurt 1 Gruppe mit (n+1) Gleichungen. Bei symmetrischen
Stockwerkrahmen ist für gerade Feldzahl statt n+1 zu
setzen $\frac{n+2}{2}$ und für ungerade Feldzahl $\frac{n+1}{2}$. In der

Praxis sind Stockwerkrahmen meist symmetrisch zu der Vertikalachse, sodaß sich erhebliche Vereinfachungen erzielen lassen.

Symmetrischer Stockwerkrahmen mit 3 Feldern.

Die weitere Untersuchung möge sich auf einen Stock= werkrahmen mit 3 Feldern beziehen. Die Endfelder sind gleich, desgleichen die Trägheitsmomente von Außen- und Innenpfosten je untereinander, sodaß Symmetrie zur Vertikalachse vorhanden ist. Ferner haben die Außen= stiele kleinere Trägheitsmomente als die Mittelstiele, sodaß die äußeren und mittleren Einzelrahmen gleiche Pfosten erhalten. Die Belastungen sind symmetrisch und umgekehrt symmetrisch.

1) Horizontalkräfte X und Knotenmomente im Geschoß= rahmen bei Belastung durch Knotenmomente.

$M'_c = M'_b$ und demzufolge $Y'_c = Y'_b$ gibt für den Mittel= rahmen Momentenbild Fig. 41

$$\bar{M}_{(y')} = \pm \frac{2 \cdot h'_2}{k_2} \text{(G.)}; \quad \bar{M}_{(y')} = \mp \frac{6 \cdot l'_2}{k_2} \text{ (Pf.)}$$

$M'_c = -M'_b$ und $Y'_c = -Y'_b$ ergibt

$\bar{M}_{(y')} = \pm 1$ (G.); $\bar{M}_{(y')} = 0$ (Pf.)

$M''_c = M''_b$ und demzufolge $Y''_c = Y''_b$ gibt Momentenbild Fig. 42

$$\bar{M}_{(y'')} = M_{(y'')} = -\frac{h'_2}{l'_2 + h'_2} \text{ (G.)}; \quad \bar{M}_{(y'')} = + \frac{l'_2}{l'_2 + h'_2} \text{(Pf.)}$$

$M''_c = -M''_b$ und $Y''_c = -Y''_b$ gibt entsprechend

$$\bar{M}_{(y'')} = \pm \frac{3 \cdot h'_2}{l'_2 + 3 \cdot h'_2} \text{ (G.)}$$

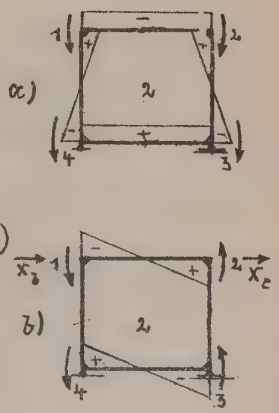
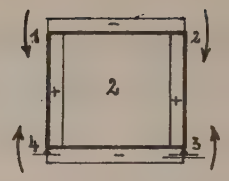


Fig. 41

$$\bar{M}_{(y')} = + \frac{l_2'}{l_2' + 3h_2'} \quad \text{(Pf.)}$$

a) Berechnung von X.

$$X_n = X_p - ' X_q ; \quad a = \frac{1}{4} \cdot (l' + h') ;$$



Die Belastung durch gleichgerichtete Eckmomente am Endrahmen 1 gibt $c_1 = \frac{l_1'}{2 \cdot h}$.

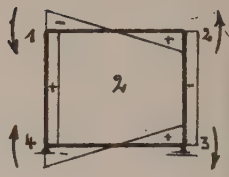


Fig. 42

Belastung $Y_b' = \bar{+} 1$:

$Y_c' = Y_b'$ gibt $c_2 = 0$;

$X_b = X_c = -\frac{- c_1}{a_1}$ und $X_3 - X_c = X_2 = 0$

$Y_c' = - Y_b'$ gibt $c_2 = \frac{l_2'}{h}$;

$$X_c = - X_b = -\frac{- c_1 - c_2}{a_1 + 2a_2} \text{ und } X_2 = 2 \cdot X_3$$

Belastung $M_\alpha' = \bar{+} 1$:

$M_d' = M_\alpha'$ gibt $X_b = X_c = -\frac{+ c_1}{a_1}$ und $X_2 = 0$

$M_d' = - M_\alpha'$ gibt $X_3 = - X_c = -\frac{+ c_1}{a_1 + 2a_2}$ und $X_2 = 2 \cdot X_3$

Belastung $M_b' = \bar{+} 1$:

$M_c' = M_b'$ gibt $X_3 = X_c = 0$

$M_c' = - M_b'$ gibt $X_3 = - X_c = -\frac{- c_2}{a_1 + 2a_2}$

und $X_2 = 2 \cdot X_3$

b) Berechnung von Y' .

$a_1 = l_1' \cdot (2 \cdot M'_{(y')1} + M'_{(y')2})$;

Für $Y_c' = Y_b'$ ist $a_2 = \frac{3}{2} \cdot l_2' \cdot M'_{(y')}$ und für

$Y_c' = - Y_b'$ ist $a_2 = l_2' \cdot M'_{(y')}$

Belastung $M'_a = \overline{+}\ 1$:

$c_1 = l'_1 \cdot (2 \cdot M'_{1(y')} + 1'_{1(y')})$; $M'_d = M'_a$ gibt $Y'_b = Y'_c = -\frac{-c_1}{a_1 + a_2}$

$M'_d = -M'_a$ gibt $Y'_b = -Y'_c = -\frac{-c_1}{a_1 + a_2}$

Belastung $M'_b = \overline{+}\ 1$:

$M'_c = +M'_b$ gibt $c_2 = \frac{3}{2} l'_2 \cdot 1'_{(y')}$ und $Y'_b = Y'_c = -\frac{+c_2}{a_1 + a_2}$

$M'_c = -M'_b$ gibt $c_2 = l'_2 \cdot M'_{(y')}$ und $Y_b = -Y_c = -\frac{+c_2}{a_1 + a_2}$

c) Berechnung von Y" .

Horizontalkräfte X treten nicht auf.

$a_1 = h'_1 \cdot M_{1(y')}$; $a_2 = h'_2 \cdot M_{2(y')}$; $c_1 = h'_1 \cdot 1_{23(y')}$; $c_2 = a_2$

Belastung $M''_a = 1$:

$M''_d = M''_c$ gibt $Y''_b = Y''_c = -\frac{+c_1}{a_1 + a_2}$;

$M''_d = -M''_a$ gibt $Y''_b = -Y''_c = -\frac{+c_1}{a_1 + a_2}$

Belastung $M_b = 1$:

$M''_c = +M''_b$ gibt $Y''_b = +Y''_c = -\frac{+c_2}{a_1 + a_2}$

$M''_c = -M''_b$ gibt $Y''_b = -Y''_c = -\frac{+c_2}{a_1 + a_2}$

2.) Bestimmung der Momente für äußere Belastung. durch Horizontalkraft H.

a) Berechnung von X:

$c = -H \cdot a_1$; $(a_1 + a_2) \cdot X_b - a_2 \cdot X_c = H \cdot a_1$

$X_c = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot X_b$; $X_b = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + 2a_2} \cdot H$

$X_{(c)} = H - X_b = H \cdot \frac{a_2}{a_1 + 2a_2}$; $X_{(b)} = H \cdot \frac{a_1}{a_1 + 2a_2}$

b) Berechnung von Y' :

$Y'_c = -Y'_b$; a_1 u. a_2 wie unter 1_b

$c_1 = l'_1 \cdot (2 \cdot M_{1(o)} - M_{1(o)})$; $c_2 = l'_2 \cdot M_o$

c) Berechnung des Knotenmomentes Z:

Diese erfolgt nach dem im Abschnitt 1 vorgeschlagenen Verfahren, wie es auch für den Pfostenträger mit verschiedenen Gurten angewendet wurde. Danach werden die Momente Z zwischen den Geschoßrahmen nacheinander ermittelt.

Das letzte Geschoß besteht aus Rahmen mit eingespannten Pfosten. Die Berechnung der Momente in den Einzelrahmen infolge Belastung durch Eckmomente M_α und M_β geschieht nach den Formeln für Einzelrahmen Seite 29 unter Vertauschung von l und h. Für die Ermittlung der Knotenmomente Y' zwischen den Einzelrahmen der Geschosse wird der Gurt als statisch bestimmtes Grundsystem angenommen.

Beispiel.

Der in Fig. 43 dargestellte Stockwerkrahmen ist durch Horizontalkräfte in den Knoten der Außenstiele belastet. Der obere Knoten erhält durch weitere Aufbauten zusätzliche Horizontalkräfte. Die für die Einzelrahmen nötigen Formel-Werte sind in der Skizze vermerkt.
Die Berechnung kann in Form von Tabellen durchgeführt werden unter Verwendung der eingangs angegebenen Formeln. Sie ist in der Tabelle auf S. 38/39 für das Geschoß 1 ausführlich angegeben. Zunächst werden, nach Ermittlung der zugehörigen X, die Knotenmomente Y' und Y" für die Berechnung der Rahmenmomente infolge Belastung durch die Eckmomente $M_\alpha = 1$ und $M_\beta = 1$ festgestellt. Das Moment wird $M''' = 1/2 \cdot (M' + M'')$.

Die in den Einzelrahmen eines jeden Geschosses als

Anteil der Außenkräfte H wirksamen Horizontalkräfte X, die Knotenmomente Y' und die endgültigen Momente in den mehrteiligen Geschoßrahmen sind ebenfalls in der Tabelle für den Rahmen 1 zusammengestellt. Mit diesen Ergebnissen wird nun die Berechnung von Z durchgeführt. Die hierfür benötigten Werte M_o und M''' sind vollständig für den Stockwerkrahmen aus der Tabelle S. 90 zu entnehmen.

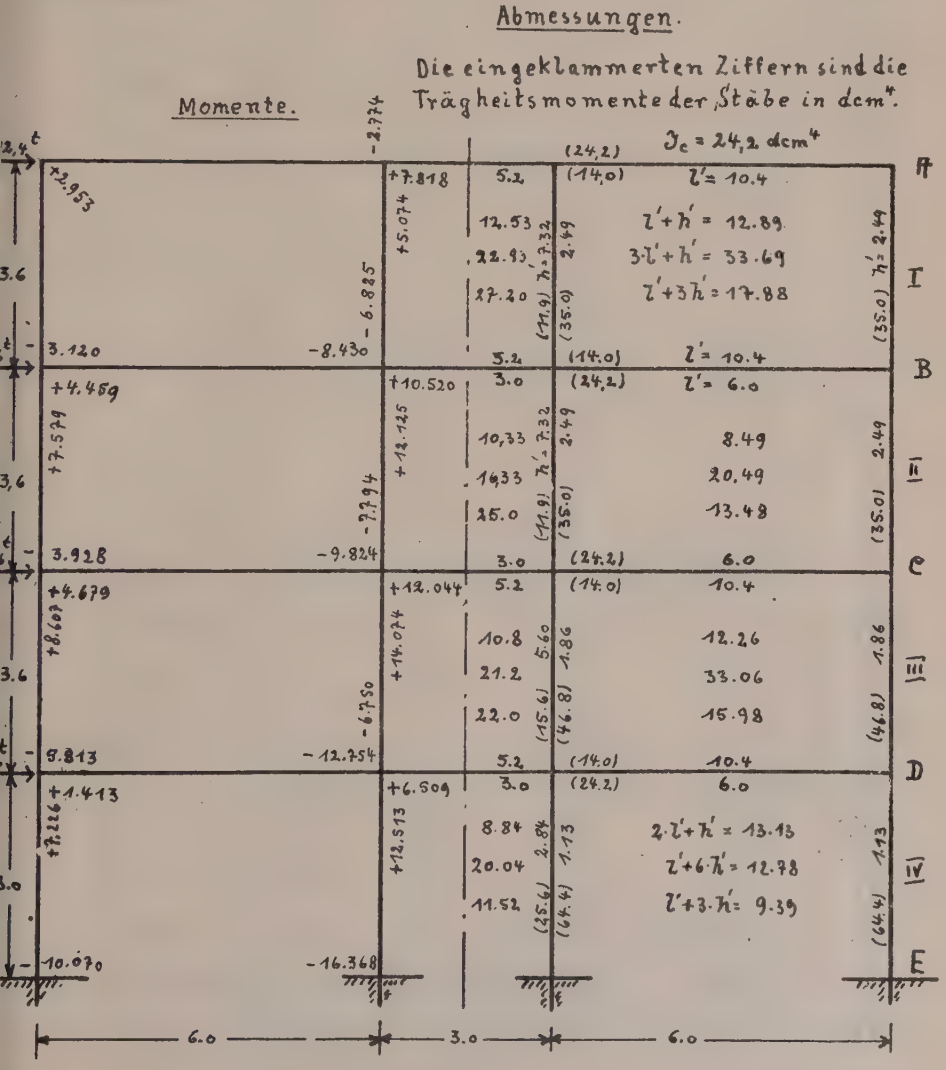


Fig. 43

Knotenmomente Y' im Geschoß I.

Rahmen		1				2			
Knoten		2	3	4	1	1	4	3	2
k		67,4				45,85			
α_1^x | $2\cdot\alpha_2^x$		3,215				6,27			
α'		3,51				2,35			
$\bar{M}_x$		− + 0,90 +				+ − 0,90 −			
$\bar{M}_{(y')}$		+ 0,463	− + 0,537 − − 0,463 +			− + 1,0 − + 0			
c^x		−1,442				−1,442			
X_n		+0,304				+0,608			
$X_n \bar{M}_x$		− + 0,274 +				+ − 0,548 + −			
$M'_{(y')}$		+ 0,189	+ 0,263 − − 0,737 +			− + 0,452 − + + − 0,548 + −			
M'_α	$\bar{M}'_{o(\alpha)}$	− 0,537 + + 0,463 −	− 0,463 +						
	c^x	+0,1442							
	X_n	−0,152				−0,304			
	$X_n \bar{M}_x$	+ − 0,137 + −				− + 0,274 − +			
	$M'_{o(\alpha)}$	− 0,400 + + 0,600 −	− 0,326 +			− + − + 0,272			
	c'	−1,20							
	Y'	+0,204							
	$Y'\cdot M'_{(y')}$	+ − 0,0385	+ 0,0535 − − 0,1505 +			− + 0,092 − + + − 0,112 + −			
	M'	− 0,3615 + + 0,6385 −	− 0,2725 + − 0,4765 +			− + 0,366 − + − + 0,162 − +			
M'_b	$\bar{M}'_{o(b)}$					− + 1,0 − + 0			
	c^x					−1,442			
	X_n	+0,152				+0,304			
	$X_n \bar{M}_x$	− + 0,137 +				+ − 0,274 + −			
	$M'_{o(b)}$	− + − + 0,137				− + 0,726 − + + − 0,274 + −			
	c'					+2,35			
	Y'	−0,40							
	$Y'\cdot M'_{(y')}$	− 0,076 +	− 0,105 + + 0,295 −			+ − 0,181 + − − + 0,219 − +			
	M'	− 0,213 +	− 0,242 + + 0,158 −			− + 0,545 − + + − 0,055 + −			

Knotenmomente Y" im Geschoß I.

Rahmen		1				2			
Knoten		2	3	4	1	1	4	3	2
i		230				341			
$\bar{M}''_{(y'')} = M''_{(y'')}$		+ 0,1125 +		− 0,306 − + 0,694 +		−	− 0,809 + + 0,191 −		+ −
α''		+1,73				+1,40			
M''_α	$\bar{M}''_{o(\alpha)}$	− 0,306 − + 0,694 +		+ 0,1125 +					
	c''	+0,28							
	Y''	−0,0895							
	$Y''\cdot M''_{(y'')}$	− 0,010 −		+ 0,0275 + − 0,062 −		+ −	+ 0,0725 − − 0,017 +		− +
	M''	− 0,316 − + 0,684 +		+ 0,140 + + 0,0505 +		+ −	+ 0,0725 − − 0,017 +		− +
M''_b	$\bar{M}''_{o(k)}$					− +	− 0,809 + + 0,191 −		+ −
	c''					+1,40			
	Y''	−0,447							
	$Y''\cdot M''_{(y'')}$	− 0,050 −		+ 0,137 + − 0,310 −		+ −	+ 0,362 − − 0,085 +		− +
	M''	− 0,050 −		+ 0,137 + − 0,310 −		− +	− 0,447 + + 0,106 −		+ −

Momente infolge H im Geschoß I.

Rahmen	1				2			
Knoten	2	3	4	1	1	4	3	2
H	12,4 t							
α	3,215				3,135			
$\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2$	9,480							
X_n	+ − 4,1 + −				+ − 4,2 + −			
$\bar{M}_o$	3,69				3,78			
α'	3,51				2,35			
c'	+38,4				−19,65			
Y'	−18,75 : 5,86 = − 3,195							
$Y'\cdot M'_{(y')}$	− 0,604 +		− 0,841 + + 2,354 −		+ −	− 1,445 + + 1,750 −		− +
M_o	+ 3,086 −		+ 2,849 − + 6,044 −		+ +	− 5,225 + − 2,030 +		− −

Momente M''' und M_o

Rahmen	1				2	
Knoten	2	3	4	1	1	4
Geschoss	I					
M'''_a	−0,339 +0,661	+0,023	−0,067 −0,2135	+0,207 +0,264	−0,1455 −0,0885	+0,218 +0,0715
M'''_b	−0,1315	+0,0815	−0,0525 −0,076	+0,1895 −0,234	−0,496 +0,0805	+0,049 +0,0255
M_o	+ 3,086 −		+ 2,849 − + 6,044 −		+ 5,225 − + 2,030 −	
Geschoss	II					
M'''_a	−0,435 +0,565	−0,008	−0,0475 −0,1885	+0,2375 +0,2375	−0,082 −0,082	+0,206 +0,065
M'''_b	−0,121	+0,071	−0,039 −0,0395	+0,200 −0,180	−0,558 +0,062	+0,013 +0,0125
M_o	+ 4,20 −		+ 3,720 − + 7,59 −		+ 6,46 − + 2,59 −	
Geschoss	III					
M'''_a	−0,2965 +0,7035	+0,0395	−0,0755 −0,2265	+0,1915 +0,2745	−0,172 −0,089	+0,224 +0,073
M'''_b	−0,135	+0,087	−0,0615 −0,0985	+0,1825 −0,2655	−0,464 +0,088	+0,071 +0,034
M_o	+ 4,767 −		+ 4,485 − + 9,585 −		+ 8,40 − + 3,30 −	
Geschoss	IV					
M'''_a	−0,261 +0,739	−0,113	−0,375	+0,170 +0,234	−0,158 −0,094	+0,149
M'''_b	−0,120	+0,259	−0,043	+0,160 −0,312	−0,403 +0,125	+0,017
M_o	+3,071	−8,948	+10,258	−2,825 −5,685	+5,14 +2,28	−4,107

Im Gurt B wird zunächst Z^B errechnet für äußere Belastung und für die Belastungen durch die Knotenmomente $Z^c_\alpha = 1$ und $Z^c_b = 1$. Die Beiwerte der Gleichungen sind:

$$a_\alpha = -1 \cdot [10{,}4 \cdot (-2 \cdot 0{,}339 + 0{,}207) + 6{,}0 \cdot (-2 \cdot 0{,}435 + 0{,}2375)] = 8{,}7$$

$$a_b = -1 \cdot [5{,}2 \cdot (-0{,}496) + 3{,}0 \cdot (-0{,}558)] = 4{,}25$$

$$b = -1 \cdot [5{,}2 \cdot (-0{,}1455) + 3{,}0 \cdot (-0{,}082)] = +1{,}004$$

Infolge äußerer Belastung:

$c_\alpha = -1\cdot[10{,}4\cdot(-2\cdot 3{,}086+2{,}849)+6{,}0\cdot(+2\cdot 4{,}20-3{,}72)]=+6{,}50$

$c_b = -1\cdot[5{,}2\cdot(-5{,}225)+3{,}0\ (+6{,}46)] = +7{,}8$

Belastung Z_α^c gibt

$c_\alpha = -6{,}0\cdot(-2\cdot 0{,}008-0{,}0475) = +0{,}384;$

$c_b = -3{,}0\cdot(+0{,}206) = -0{,}636$

Belastung $Z_b^c = 1$ gibt

$c_\alpha = -6{,}0\cdot(+2\ 0{,}071-0{,}039) = -0{,}618;$

$c_b = -3{,}0\cdot(+0{,}013) = -0{,}039$

Die Gleichungen für Z_α^B und Z_b^B bei äußerer Belastung lauten:

$8{,}70\cdot Z_\alpha^B + 1{,}004\cdot Z_b^B = -6{,}50$

$1{,}004\cdot Z_\alpha^B + 4{,}25\cdot Z_b^B = -7{,}8$

$Z_\alpha^B = -0{,}548$ mt; $Z_b^B = -1{,}705$ mt

Entsprechend gibt Belastung $Z_\alpha^c = 1$:

$Z_\alpha^B = -0{,}063$; $Z_b^B = +0{,}135$ mt

und Belastung $Z_b^c = 1$:

$Z_\alpha^B = +0{,}072$; $Z_b^B = -0{,}0079$ mt

Die Momente in den Stäben 3–4 der Einzelrahmen des Geschosses II – Gurtstab C – infolge obiger Belastungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Belastung	Rahmen	1		2			1		2	
	Knoten	3	4	4	3		3	4	4	3
	$Z_\alpha^B\cdot M'''$	+0,0005	+0,0030	−0,013	+		−0,0006	−0,0034	+0,0148	−
	$Z_b^B\cdot M'''$	+0,0096	−0,0053	+0,0018	−		−0,0006	+0,0003	−0,0001	+
Z_α^c	$Z^B\cdot M'''$	+0,0101	−0,0023	−0,0112	+	Z_b^c	−0,0012	−0,0031	+0,0147	−
	M_o	−0,435	+0,2375	−0,082	+		−0,121	+0,200	−0,558	+
	M	−0,4249	+0,2352	−0,0932	+		−0,1222	+0,1969	−0,5433	+
H	$Z_\alpha^B\cdot M'''$	+0,0044	+0,0260	−0,1130						
	$Z_b^B\cdot M'''$	−0,1210	+0,0665	−0,0222	+					
	$Z^B\cdot M'''$	−0,1166	+0,0925	−0,1352	+					
	M_o	−4,20	+3,720	−6,46	+					
	M	−4,3166	+3,8125	−6,[illegible]2	+					

In den Gleichungen zur Bestimmung von Z^C am Doppelstab C:

$a_\alpha = 7{,}86$; $a_\beta = 4{,}04$; $b = 1{,}175$,

infolge Belastung durch H

$c_\alpha = -23{,}6$, $c_\beta = -23{,}9$ und $Z^C_\alpha = +2{,}21$ mt, $Z^C_\beta = +5{,}27$ mt

infolge Belastung durch $Z^D_\alpha = 1$

$c_\alpha = -0{,}037$, $c_\beta = -1{,}16$ und $Z^C_\alpha = -0{,}04$ mt, $Z^C_\beta = +0{,}298$ mt

infolge Belastung durch $Z^D_\beta = 1$

$c_\alpha = -1{,}17$, $c_\beta = -0{,}369$ und $Z^C_\alpha = +0{,}141$ mt, $Z^C_\beta = +0{,}052$ mt,

Die Momente in den Stäben 3–4 der Einzelrahmen des Geschosses III – Gurtstab D – infolge obiger Belastungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Belastung	Rahmen	1		2			1		2	
	Knoten	3	4	4	3		3	4	4	3
Z^D_α	$Z^C_\alpha \cdot M'''$	−0,0016	+0,0030	−0,0090	+		+0,0056	−0,0106	+0,0316	−
	$Z^C_\beta \cdot M'''$	+0,0259	−0,0183	+0,0212	−		+0,0045	−0,0032	+0,0037	−
	$Z^C \cdot M'''$	+0,0243	−0,0153	+0,0122	−	Z^D_β	+0,0101	−0,0138	+0,0353	−
	M_o	−0,2965	+0,1915	−0,172	+		−0,135	+0,1825	−0,464	+
	M	−0,2722	+0,1762	−0,1598	+		−0,1249	+0,1687	−0,4287	+
H	$Z^C_\alpha \cdot M'''$	+0,0870	−0,167	+0,495	−					
	$Z^C_\beta \cdot M'''$	+0,4580	−0,324	+0,374	−					
	$Z^C_\alpha \cdot M'''$	+0,545	−0,491	+0,869	−					
	M_o	−4,767	+4,485	−8,400	+					
	M	−4,222	+3,994	−7,531	+					

In den Gleichungen zur Bestimmung von Z^D am Doppelstab D ist

$a_\alpha = 5{,}95$; $a_\beta = +3{,}44$; $b = +1{,}31$

Infolge Belastung durch H

$c_\alpha = +26{,}4$; $c_\beta = +23{,}8$;

$Z^D_\alpha = -3{,}17$ mt; $Z^D_\beta = -5{,}71$ mt;

Die endgültigen Knotenmomente Z in den Gurten infolge Belastung durch H sind nunmehr:

$Z_{\alpha}^{D} = -3{,}17$ mt; $Z_{b}^{D} = -5{,}71$ mt;

$Z_{\alpha}^{C} = +2{,}21 - 0{,}04\cdot(-3{,}17) + 0{,}141\cdot(-5{,}71) = +1{,}532$ mt.

$Z_{b}^{C} = +5{,}27 + 0{,}298\cdot(-3{,}17) + 0{,}052\cdot(-5{,}71) = +4{,}027$ mt

$Z_{\alpha}^{B} = -0{,}548 - 0{,}063\cdot(+1{,}532) + 0{,}072\cdot(+4{,}027) = -0{,}355$ mt

$Z_{b}^{B} = -1{,}705 + 0{,}135\cdot(+1{,}532) - 0{,}0079\cdot(+4{,}027) = -1{,}53$ mt

Die Momente in den Rahmen des ersten Geschosses sind

$$M = \pm M_{o} \pm Z_{\alpha}^{B}\cdot M_{\alpha}''' \pm Z_{b}^{B}\cdot M_{b}'''$$

in den Rahmen des zweiten Geschosses

$$M_{o} = \pm M_{o} \pm Z_{\alpha}^{B}\cdot M_{\alpha}''' \pm Z_{b}^{B}\cdot M_{b}''' \pm Z_{\alpha}^{C}\cdot M_{\alpha}'' \pm Z_{b}^{C}\cdot M_{b}'' = \pm M_{o} \pm Z^{B}\cdot M''' \pm Z^{C}\cdot M''$$

In gleicher Weise ergeben sich die Momente in den anderen Geschossen. Für das 2. Geschoß ist in der nachstehenden Tabelle die Ermittlung der Momente durchgeführt.

Rahmen	1				2	
Knoten	2 (3)	3 (2)	4 (1)	1 (4)	1 (4)	4 (1)
$Z_{\alpha}^{B}\cdot M_{\alpha}'''$ G	+0,155	+0,003	+0,017	−0,084	+0,029	−0,073
$Z_{\alpha}^{B}\cdot M_{\alpha}'''$ Pf	−0,200		+0,067	−0,084	+0,029	−0,023
$Z_{b}^{B}\cdot M_{b}'''$ G	+0,185	−0,109	+0,060	−0,305	+0,854	−0,020
$Z_{b}^{B}\cdot M_{b}'''$ Pf			+0,061	+0,276	−0,095	−0,019
$Z^{B}\cdot M'''$ G	+0,340	±0,106	+0,077	−0,389	+0,883	−0,093
$Z^{B}\cdot M'''$ Pf	−0,015		+0,128	+0,192	−0,066	−0,042
$Z_{\alpha}^{C}\cdot M_{\alpha}'''$ G	−0,012	−0,666	+0,324	−0,073	+0,316	−0,126
$Z_{\alpha}^{C}\cdot M_{\alpha}'''$ Pf		+0,866	+0,324	−0,289	+0,100	−0,126
$Z_{b}^{C}\cdot M_{b}'''$ G	+0,286	−0,488	+0,806	−0,157	+0,053	−2,245
$Z_{b}^{C}\cdot M_{b}'''$ Pf			−0,726	−0,159	+0,050	+0,250
$Z^{C}\cdot M'''$ G	+0,274	−1,154	+1,130	−0,230	+0,369	−2,371
$Z^{C}\cdot M'''$ Pf		+0,378	−0,402	−0,448	+0,150	+0,124
$\Sigma(Z\cdot M''')$	+0,614	−1,260	+1,207	−0,619	+1,252	−2,464
	+0,259	+0,272	−0,274	−0,256	+0,084	+0,082
M_{o} G	+4,20 −		+3,72 −		+6,46 −	
M_{o} Pf			+7,59 −		+2,59 −	
M G	+4,814	−5,460	+4,927	−4,339	+7,712	−8,924
M Pf	+4,459	−3,928	+7,316	−7,846	+2,674	−2,508

In Fig. 43 S. 87 sind die Momente eingetragen.

Annäherungsverfahren.

Sehr gute Ergebnisse werden nach dem weiter beschrie= benen Berechnungsverfahren erzielt. Es werden zunächst die Momente der äußeren Kräfte in den mehrteiligen Gesch rahmen nach Tabelle S. 89 unten für alle Geschosse er= mittelt. Sie sind der Tabelle S. 90 zu entnehmen. Dann wird ein System einfacher Stockwerkrahmen, aus den Einze rahmen 1 und 2 bestehend, angenommen und mit den in den Geschoßrahmen wirksamen Momenten belastet. Zur Herstellu der Symmetrie werden dabei im einfachen Geschoßrahmen 1 die Momente M_o, die an den Doppelstäben auftreten, so zerlegt, daß sich Knotenmomente ergeben Y' und Y" Im einfachen Geschoßrahmen 2 ist Symmetrie der Belastung vorhanden.

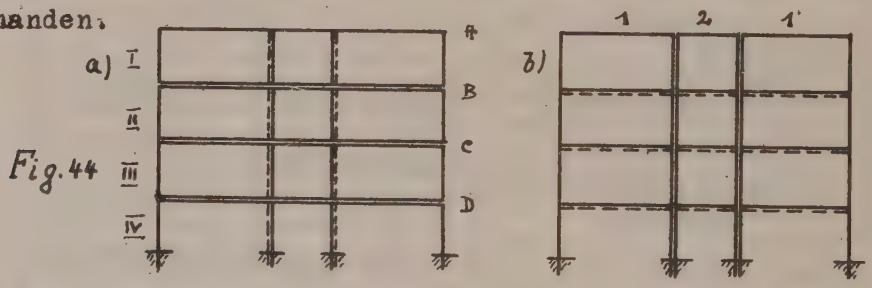


Fig. 44

Momente Y' und Y" nach S. 24 Formel 1 und 2.

Stockwerk-Rahmen		1				2			
Geschoss		I	II	III	IV	I	II	III	IV
Y'	l'	10,4	6,0	10,4	6,0	5,2	3,0	5,2	3,0
	h'	2,49	2,49	1,86	1,13	7,33	7,33	5,60	2,84
	k	34,75	26,95	31,95	(12,78)	54,4	50,0	44,0	(20,0)
	M'	± 0,3	± 0,223	± 0,325	± 0,47	± 0,096	± 0,060	± 0,118	± 0,15
	1-M'	∓ 0,7	∓ 0,777	∓ 0,675	∓ 0,53	∓ 0,904	∓ 0,940	∓ 0,882	∓ 0,85
Y"	i	435	174	405	(13,13)				
	M"	- 0,060 + 0,867	- 0,086 + 0,792	- 0,048 + 0,896	- 0,457 + 0,914				
	1-M"	- 0,133	- 0,208	- 0,104	- 0,086				

Einfacher Stockwerkrahmen 1.

$M'_{(o)} = \frac{1}{2} \cdot (M_{1(o)} + M_{2(o)})$; $M''_{(o)} = \frac{1}{2} \cdot (M_{1(o)} - M_{2(o)})$

Nach Tabelle S. 90 ist

Stab	1-2 bezw. (1)-(2)			
Geschoss	I	II	III	IV
$M'_{(o)}$	± 2,968	± 3,960	± 4,626	± 2,948
$M''_{(o)}$	± 0,118	± 0,240	± 0,141	± 0,123

1) Bestimmung von Y' :

$a'_1 = 10,4 \cdot 0,7 + 6,0 \cdot 0,777 = + 11,94$

$b'_{12} = - 6,0 \cdot 0,223 = - 1,34$

$a'_2 = 6,0 \cdot 0,777 + 10,4 \cdot 0,675 = + 11,69$

$b'_{23} = - 10,4 \cdot 0,325 = - 3,38$

$a'_3 = 10,4 \cdot 0,675 + 6,0 \cdot 0,53 = + 10,21$

$c'_1 = \cdot 10,4 \cdot 2,968 + 6,0 \cdot 3,96 = - 7,2$

$c'_2 = - 6,0 \cdot 3,96 + 10,4 \cdot 4,626 = + 24,5$

$c'_3 = - 10,4 \cdot 4,626 + 6,0 \cdot 2,948 = - 30,5$

Gleichungen für Z':

$11,94 \cdot Z'_B - 1,34 \cdot Z'_C = 7,2$

$- 1,34 \cdot Z'_B + 11,69 \cdot Z'_C - 3,38 \cdot Z'_D = - 24,5$

$- 3,38 \cdot Z'_C + 10,21 \cdot Z'_D = 30,5$

$Z'_B = + 0,46$ mt

$Z'_C = - 1,30$ mt

$Z'_D = + 2,55$ mt

2) Bestimmung von Y" :

$a''_1 = 10,4 \cdot 0,133 + 6,0 \cdot 0,208 = 2,63$

$b''_{12} = 6,0 \cdot 0,086 = 0,516$

$a''_2 = 6,0 \cdot 0,208 + 10,4 \cdot 0,104 = 2,33$

$b''_{23} = 10,4 \cdot 0,048 = 0,499$

$a''_3 = 10,4 \cdot 0,104 + 6,0 \cdot 0,086 = = 1,598$

$c''_1 = + 10,4 \cdot 0,118 - 6,0 \cdot 0,24 = - 0,21$

$c_2'' = + 6,0 \cdot 0,24 - 10,4 \cdot 0,141 = - 0,03$

$c_3'' = + 10,4 \cdot 0,141 - 6,0 \cdot 0,123 = + 0,73$

Gleichungen für Z"

$2,63 \cdot Z_B'' + 0,516 \cdot Z_C'' = 0,21$

$0,516 \cdot Z_B'' + 2,33 \cdot Z_C'' + 0,499 \cdot Z_D'' = 0,03$

$0,499 \cdot Z_C'' + 1,598 \cdot Z_D'' = - 0,73$

$Z_B'' = + 0,062$ mt

$Z_C'' = + 0,0915$ "

$Z_D'' = - 0,428$ "

Einfacher Stockwerkrahmen 2.

Bestimmung von Y':

$a_1' = 5,2 \cdot 0,904 + 3,0 \cdot 0,94 = + 7,52$

$b_{12}' = - 3,0 \cdot 0,06 = - 0,18$

$a_2' = 3,0 \cdot 0,94 + 5,2 \cdot 0,882 = + 7,41$

$b_{23}' = - 5,2 \cdot 0,118 = - 0,615$

$a_3' = 5,2 \cdot 0,882 + 3,0 \cdot 0,85 = + 7,14$

$c_1' = - 5,2 \cdot 5,225 + 3,0 \cdot 6,46 = - 7,77$

$c_2' = - 3,0 \cdot 6,46 + 5,2 \cdot 8,40 = +24,32$

$c_3' = - 5,2 \cdot 8,40 + 3,0 \cdot 5,14 = -28,28$

Gleichungen für Z' :

$7,52 \cdot Z_B' - 0,18 \cdot Z_C' = 7,77$

$- 0,18 \cdot Z_B' + 7,41 \cdot Z_C' - 0,615 \cdot Z_D' = -24,32$

$- 0,615 \cdot Z_C' + 7,14 \cdot Z_D' = 28,28$

$Z_B' = + 0,96$ mt

$Z_C' = - 2,95$ "

$Z_D' = + 3,70$ "

Die endgültigen Momente, die unter Berücksichtigung der Momente Z nunmehr für den Geschoßrahmen sich ergeben, sind für den Geschoßrahmen 2 in der Tabelle auf S.9 zusammengestellt. Die im Stockwerkrahmen auftretenden

Momente sind in Fig. 45 eingetragen. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen der genauen Berechnung ist recht gut.

Momente im Geschoß II.

Rahmen	1				2	
Knoten	2 (3)	3 (2)	4 (1)	1 (4)	2 (3)	3 (2)
$Z'_B \cdot M'$	+0,357 −0,103	− 0,103 +		−0,357 +0,103	+0,902 −0,058	−0,058
$Z'_C \cdot M'$	+0,290	− +	1,010 + 0,290 −	−0,290	+0,177	−2,773 +0,177
$Z' \cdot M'$	+0,647 +0,187	− +	1,113 + 0,187 −	−0,647 −0,187	+1,079 +0,119	−2,831 +0,119
$Z''_B \cdot M''$	−0,013 +0,049	− 0,005 −		−0,013 +0,049		
$Z''_C \cdot M''$	−0,008	− +	0,019 − 0,072 +	−0,008		
$Z'' \cdot M''$	−0,021 +0,041	− +	0,024 − 0,067 +	−0,021 +0,041		
$\Sigma(Z \cdot M)$	+0,626 +0,228	−1,137 +0,254	+1,089 −0,120	−0,668 −0,146		
M_o	+ 4,20 −		+ 3,72 − + 7,59 −		+ 6,46 − + 2,59 −	
M	+4,826 +4,428	−5,337 −3,946	+4,809 +7,470	−4,388 −7,736	+7,539 +2,709	−9,291 −2,471

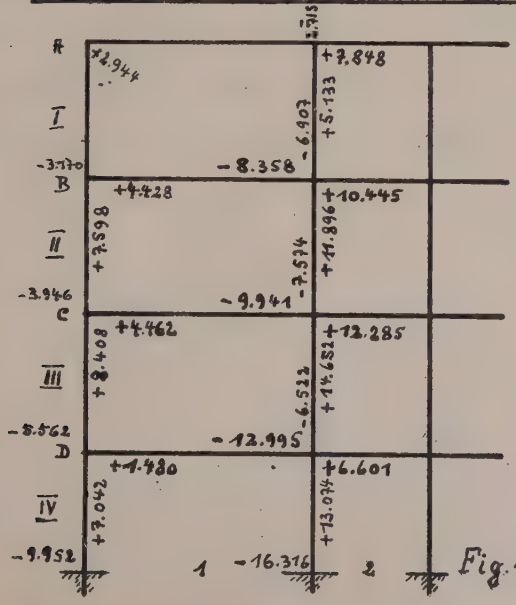


Fig. 45

Je nach dem Genauigkeitsgrad, der erwünscht ist, kann zur weiteren Vereinfachung noch auf die Berechnung der Momente Y" verzichtet werden, da ihr Einfluß nur gering ist.

Lebenslauf.

Adolf M e l l e s wurde am 4. Sept. 1890 in Burgsteinfurt i/Westfalen geboren. Er besuchte die Volksschule und das humanistische Gymnasium seiner Heimatstadt und bestand dort auch die Reifeprüfung. Das Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule in Charlottenburg schloß mit der Diplom= prüfung am 12. Dez. 1914 ab.

Die militärische Ausbildung zu Beginn des Welt= krieges, der Frontdienst und der Aufenthalt im Laza= rett bis zur Entlassung wegen einer Kriegsverletzung währte bis zum Jahre 1916.

Anschließend war Adolf Melles bei verschiedenen Firmen beruflich tätig auf den Gebieten des Luft= schiffbaues, des Eisenbaues, des Eisenbetonbaues und des Tiefbaues. In diese Zeit fällt auch ein beruf= licher Auslandsaufenthalt von ca. 1½ Jahren in Niederländisch Indien. Seit dem Jahre 1927 steht er ohne Unterbrechung im Dienste der Firma Grün & Bilfinger A.G., Mannheim, Niederlassung Breslau.

- - - - - -